

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»



В.Л. Кожевников, А.В. Кожевников

ТЕОРІЯ ІНФОРМАЦІЇ ТА КОДУВАННЯ

Навчальний посібник

Видання друге, виправлене та доповнене

Дніпро
НТУ «ДП»
2024

УДК 621.391
К58

*Рекомендовано вченою радою НТУ «Дніпровська політехніка»
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
спеціальності 123 «Комп'ютерна інженерія»
(протокол № 12 від 04.11.2024 р.)*

Рецензенти:

Д.Г. Зеленцов, д-р техн. наук, проф. (Український державний університет науки і технологій).

В.В. Герасимов, канд техн. наук, доц. (Дніпровський національний університет ім. О. Гончара).

Кожевников В.Л.

К58 Теорія інформації та кодування [Електронний ресурс] : навч. посіб., 2-ге вид. випр. та доп. / В.Л. Кожевников, А.В. Кожевников; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2024. – 177 с.

Розглянуто основи статистичної теорії інформації, визначення пропускнуої спроможності каналів зв'язку, а також теорії кодування повідомлень в інформаційних системах.

Зміст посібника відповідає програмі навчальної дисципліни «Теорія інформації та кодування» і адресовано студентам, які проходять підготовку за спеціальністю 123 «Комп'ютерна інженерія», а також здобувачам інших спеціальностей, які вивчають цю дисципліну.

УДК 621.391

© В.Л. Кожевников, А.В. Кожевников, 2024.
© НТУ «Дніпровська політехніка», 2024.

ПЕРЕДМОВА

Дисципліна «Теорія інформації та кодування» належить до групи професійно орієнтованих і посідає важливе місце в підготовці бакалаврів спеціальності 123 «Комп'ютерна інженерія». Завдання дисципліни – формування базових знань про статистичну теорію інформації, про визначення пропускну спроможності каналів зв'язку, а також з теорії кодування повідомлень у системах автоматики та передачі технологічних відомостей, набуття навичок визначення інформативності дискретних і неперервних джерел повідомлень, узгодження характеристик сигналів у каналах зв'язку, синтезу оптимальних, елементарних перешкодостійких, лінійних, циклічних і каналних кодів. Навчальний матеріал дисципліни потребує від студентів знань з вищої математики, володіння алгоритмічними мовами й основами програмування, електротехніки та електроніки, він буде корисним при вивченні основ збору, обробки й передачі інформації, комп'ютерних мереж, а також при виконанні кваліфікаційної роботи.

В основу посібника покладено лекційний курс та матеріал лабораторного практикуму з дисципліни, які впродовж низки років викладали автори в Національному технічному університеті «Дніпровська політехніка». Посібник можуть використовувати в самостійній роботі студенти заочної форми навчання. Аби ця робота була успішною, виклад теоретичного матеріалу доповнено прикладами розв'язування задач, а наприкінці кожного розділу містяться контрольні питання і завдання, у додатках – підсумкові тести. Зміст кожної лабораторної роботи включає такі елементи: формулювання об'єкта досліджень, подання необхідних теоретичних відомостей, постановку завдання досліджень, опис послідовності їхнього виконання, контрольні питання і завдання.

Перший розділ написано доцентом Кожевниковим А.В., другий – професором Кожевниковим В.Л., а третій – обома авторами.

У зв'язку з навчальною метою в тексті книги не подано бібліографічних посилань на використання відомих джерел. Список літератури включає тільки ті публікації, що рекомендуються для поглиблення знань і розширення навичок застосування теорії інформації та кодування.

Посібником мають користуватися здобувачі бакалаврського та магістерського ступенів спеціальності 123 «Комп'ютерна інженерія».

Автори з вдячністю розглянуть усі зауваження та побажання читачів цієї навчальної книги, що сприятиме подальшому покращенню її змісту.

ПЕРЕДМОВА ДО ДРУГОГО ВИДАННЯ

З часу публікації першого видання навчального посібника «Теорія інформації та кодування» і початку його впровадження в освітню практику пройшло понад десять років. Кількість цитувань видання в системі Google Scholar досягла чотирнадцяти.

За цей період виявилися слабкі та сильні сторони видання і виникла необхідність осучаснення його змісту.

Друге видання порівняно з першим зазнало певних змін. У перший розділ додано матеріал про чинники обмеження пропускнуєї спроможності каналів передачі інформації різного фізичного походження, вимоги до пропускнуєї спроможності каналів, які передають мультимедійний контент, особливості радіоканалів різних частотних діапазонів. Також наведено докази деяких основних положень статистичного виміру інформації. У другому розділі переглянуто класифікацію кодів. До кожного з трьох розділів додано контрольні питання і завдання. Подані до тексту два нові додатки з відомостями про закони розподілу випадкових величин і ймовірності складних випадкових подій та умовні ймовірності, що необхідно для опанування матеріалу першого розділу посібника.

Було виправлено помилки, виявлені в першому виданні.

Переглянуто й доповнено список рекомендованої літератури новими публікаціями.

Автори сподіваються, що внесені в друге видання зміни сприятимуть ліпшому засвоєнню студентами навчального матеріалу дисципліни «Теорія інформації та кодування».

ВСТУП

Існування й розвиток різноманітних систем – технічних, біологічних, соціальних та інших певною мірою визначено обміном між частинами цих систем матерією, енергією та інформацією.

Зокрема обмін інформацією проявляє себе в умовах, коли причини й наслідки процесів мають імовірнісні зв'язки. Якщо процеси детерміновані, то вважається, що інформаційної складової в них немає. Такий погляд на визначення кількості інформації має назву статистичного. При цьому загальні уявлення про інформацію та її цінність не відображено, бо до уваги беруть тільки кількісний бік, що відбиває невизначеність наслідків процесів (дослідів). Варто зауважити, що в інформаційних системах технологічного призначення поняття цінності інформації не використовують. Натомість уводять поняття пріоритету повідомлень, що базується на техніко-економічних критеріях обслуговування запитів, які виникають у системі.

У колі розгляду теорії інформації перебувають процеси збору, перетворення, передачі, зберігання та надання інформації в технологічних системах гірничо-металургійних виробництв, енергосистем, телекомунікацій. У процесі виконання цих завдань виділяють три основні інформаційні підсистеми: джерела повідомлень, канали зв'язку й одержувачі повідомлень. У загальному випадку підсистеми охоплюють як людські, так і машинні складові, бо джерелами та одержувачами повідомлень можуть бути оператори та (або) керівні ЕОМ.

Далі при розгляді згаданих систем під терміном «інформація» будемо мати на увазі частину повідомлення, невідому одержувачеві.

Отже, необхідними умовами існування інформації в статистичному оцінюванні її кількості є наявність досліду та невизначеність його наслідків. Перша перевага статистики – її об'єктивність. Кількість інформації визначають на основі аналізу ймовірнісних характеристик її джерела, це не залежить від особистості оцінювача. Друга перевага полягає в універсальності. Процедура встановлення кількості інформації та її одиниці виміру – це незалежні від природи її джерела чинники.

Важливою складовою процесів обробки, передачі й зберігання інформації є кодування повідомлень. Метою кодування в умовах браку перешкод є подання повідомлень у більш компактному вигляді або стиснення даних, а коли перешкоди існують – виявлення та виправлення помилок, які виникають під впливом перешкод, тобто забезпечення достовірності інформації.

Автор основних положень статистичної теорії інформації – американський математик Клод Шеннон (1948). Ним же були розроблені основи кодування повідомлень у каналах зв'язку в умовах, коли перешкод не існує та при їх наявності. Розвиток теорії кодування в другій половині ХХ століття сформував її як окрему науку. Сучасна теорія інформації та кодування дозволяє виконувати завдання збору, перетворення, передачі, зберігання й подання інформації найбільш економічними й ефективними шляхами.

1. ОСНОВИ СТАТИСТИЧНОЇ ТЕОРІЇ ІНФОРМАЦІЇ

Навчальні цілі: формування знань щодо основ статистичної теорії інформації та набуття навичок визначення інформативності дискретних та неперервних джерел повідомлень, пропускної спроможності каналів зв'язку та узгодження характеристик сигналів і каналів.

1.1. Кількість інформації та ентропія

Поняття ентропії, як міри вихідної (апріорної) невизначеності результатів дослідів, було впроваджено Шенноном за аналогією з термодинамічною ентропією.

На основі цього кількість інформації, що одержують у результаті проведення дослідів, визначається як

$$I = H - H_3, \quad (1.1)$$

де H – апріорна ентропія, H_3 – залишкова ентропія (невизначеність наслідків) дослідів.

У цьому поданні кількість інформації, отримана в результаті дослідів, – це міра знятої невизначеності.

При передачі повідомлень у каналах без перешкод $H_3 = 0$ і $I = H$.

У додатку до систем зв'язку термін «кількість інформації» увів Ральф Хартлі в 1928 р. Він запропонував визначати цю величину як

$$I = -\log p = -\log \frac{1}{N} = \log N, \quad (1.2)$$

де p – імовірність події, що появи одного з N можливих рівноймовірних наслідків дослідів.

Логарифмічна міра кількості інформації може бути обґрунтована такими міркуваннями:

1. Кількість інформації більше в досліді з більшим числом рівноймовірних наслідків:

$$N_1 > N_2 \Rightarrow I(N_1) > I(N_2). \quad (1.3)$$

2. Якщо дослід має один результат, $N = 1$, то

$$I(N = 1) = 0. \quad (1.4)$$

3. Кількість інформації в досліді, що складається з окремих етапів, в яких мають місце взаємозалежні наслідки $N_1, N_2 \dots$

$$I(N_1, N_2, \dots) = I(N_1) + I(N_2) + \dots \quad (1.5)$$

Тоді в загальному випадку кількість інформації визначиться як

$$I = -a \cdot \log_b p. \quad (1.6)$$

Постійні a й b встановлюють масштаб величини I . По Хартлі $a=1$, $b=2$. У цьому випадку, якщо

$$p = \frac{1}{2}, \text{ те } I = -\log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2 = 1 \text{ біт.} \quad (1.7)$$

Ця одиниця кількості інформації використовується, як правило, у системах зв'язку. Відомі також аналогічні одиниці виміру нат ($b=e \approx 2,73\dots$) і діт ($b=10$). Надалі, якщо значення основи $b=2$, воно у функції логарифма не вказується.

1.2. Ентропія дослідів, що мають нерівноймовірні взаємозалежні наслідками

Припустимо, що дослід – це генерація дискретним джерелом випадкових послідовностей елементів (повідомлень) зі значеннями $1, 2, 3, \dots, m$. Число відмінних елементів називають основою алфавіту джерела. Статистичні властивості джерела незмінні, тому імовірності появи елементів $p_1, p_2, p_3, \dots, p_m$ у послідовностях також є незмінними.

Відповідно до теореми про множення імовірностей для дослідів з випадковими нерівноймовірними й взаємозалежними наслідками середня імовірність появи будь-якої послідовності сигналів джерела довжиною $n \rightarrow \infty$ становить

$$p_c = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot p_3^{n_3} \cdot \dots \cdot p_m^{n_m} = \prod_{i=1}^m p_i^{n_i}, \quad (1.8)$$

де $n_1, n_2, n_3, \dots, n_m$ – числа елементів зі значеннями $1, 2, 3, \dots, m$ в послідовності довжиною $n = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_m$. При цьому

$$p_1 = \frac{n_1}{n}, p_2 = \frac{n_2}{n}, p_3 = \frac{n_3}{n}, \dots, p_m = \frac{n_m}{n}, n \rightarrow \infty. \quad (1.9)$$

Зазначимо, що кількість можливих послідовностей N в цьому випадку визначається як усі розміщення із повтореннями з m по n , тобто $N = m^n$.

Оскільки для даного джерела $p_c = const$, до нього можливо застосувати вираз у вигляді (1.2)

$$H_c = -\log p_c = -\log \prod_{i=1}^m p_i^{n_i} = -\log \prod_{i=1}^m p_i^{n \cdot p_i} = -n \cdot \sum_{i=1}^m p_i \cdot \log p_i, \text{ біт/послед. (1.10)}$$

Величина

$$H = \frac{H_c}{n} = -\sum_{i=1}^m p_i \cdot \log p_i, \text{ біт/елемент (1.11)}$$

називається середньою питомою ентропією багатоелементного джерела.

У розрахунках інформаційних характеристик систем широко використовується поняття часткової ентропії

$$H_i = -p_i \cdot \log p_i, \text{ біт/результат. (1.12)}$$

При реалізації конкретного результату дослідження кількість інформації становить

$$I_i = H_{Pi} = -\log p_i, \text{ біт/результат, (1.13)}$$

а H_{Pi} називають повною ентропією на « i »-й результат дослідження.

1.3. Дослідження властивостей часткової ентропії

Якщо « i »-й результат дослідження детермінований, то $p_i = 1$ і згідно (1.12)

$$H_{i1} = -1 \cdot \log 1 = 0. \quad (1.14)$$

У випадку, коли $p_i = 0$ (результат не реалізуємо), $H_{i0} = -0 \cdot \log 0$ – часткова ентропія безпосередньо невизначена.

Заміна змінних для рівномірних наслідків дослідження $p_i = \frac{1}{k}$ й розкриття невизначеності за правилом Лопітала дає результат

$$\lim_{p_{i0} \rightarrow 0} H_{i0} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{k} \cdot \log k \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{1}{k} \cdot \log e}{1} \right) = 0. \quad (1.15)$$

Похідна функції ентропії має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{dH_i}{dp_i} &= \frac{d}{dp_i}(-p_i \log p_i) = -\left(1 \cdot \log p_i + p_i \frac{1}{p_i} \log e\right) = \\ &= -\log p_i - \log e = -\log(e \cdot p_i). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Оскільки

$$\begin{cases} dH_i/dp_i = 0 \text{ при } p_i = \frac{1}{e} \\ dH_i/dp_i > 0 \text{ при } 0 < p_i < \frac{1}{e} \\ dH_i/dp_i < 0 \text{ при } \frac{1}{e} < p_i < 1, \end{cases} \quad (1.17)$$

часткова ентропія має один максимум, при $p_i = \frac{1}{e} \approx 0,36$, а її значення складає

$$H_{i \max} = -\frac{1}{e} \log \frac{1}{e} = 0,5 \text{ біт/результат.}$$

Графік залежності $H_i = f(p_i)$ наведений на рис. 1.1.

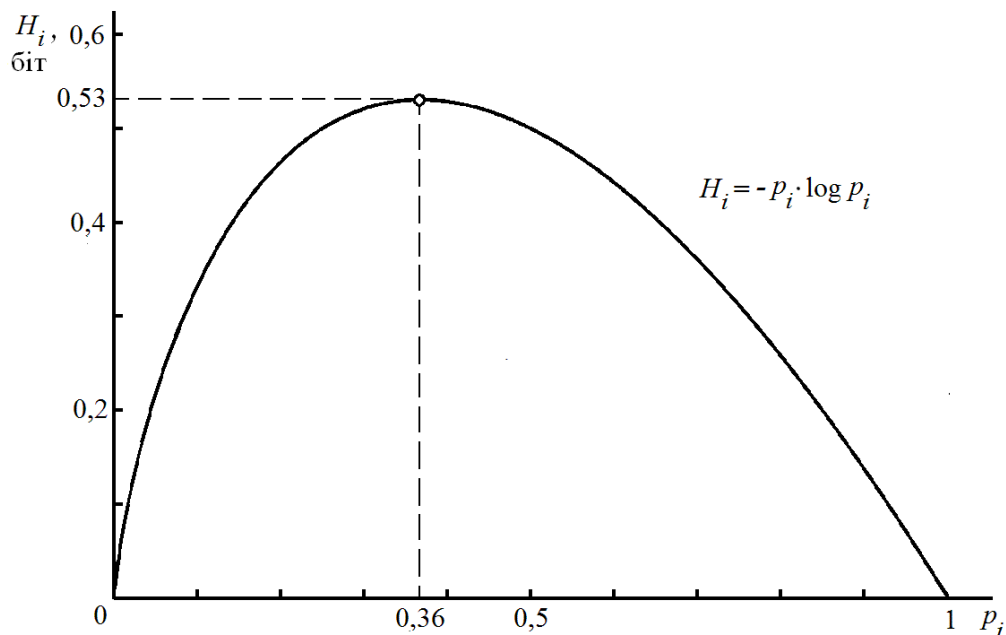


Рис. 1.1

При виконанні розрахунків інформаційних характеристик джерел дискретних повідомлень зручно користуватися табульованими значеннями цієї функції, які наведені в додатку 1.

1.4. Дослідження ентропії двійкового джерела. Умова максимуму ентропії дискретного джерела, якщо $m > 2$

Приклад визначення ентропії за формулою Шеннона (1.11) покажемо для найпростішого досліду на основі джерела повідомлень, який створює потік (послідовність) із двох можливих наслідків – повідомлень 0, 1, що з'являються випадково й незалежно один від одного з безумовними імовірностями p_0, p_1 .

Середнє значення ентропії на повідомлення розглянутого джерела становить

$$H = -p_0 \log p_0 - p_1 \log p_1 = -p_0 \log p_0 - (1 - p_0) \log(1 - p_0). \quad (1.18)$$

Сума безумовних імовірностей $p_1 + p_0 = 1$. При граничних значеннях $p_1 = 0$ ($p_0 = 1 - 0 = 1$) і $p_1 = 1$ ($p_0 = 1 - 1 = 0$), у відповідності із властивостями часткової ентропії, ентропія джерела дорівнює нулю. Похідна функції ентропії має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dp_0} &= - \left[1 \cdot \log p_0 + p_0 \cdot \frac{1}{p_0} \cdot \frac{1}{\ln 2} - 1 \cdot \log(1 - p_0) - (1 - p_0) \cdot \frac{1}{1 - p_0} \cdot \frac{1}{\ln 2} \right] = \\ &= - [\log p_0 - \log(1 - p_0)]. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Оскільки

$$\begin{cases} dH / dp_0 = 0 \text{ при } p_0 = 0.5 \\ dH / dp_0 > 0 \text{ при } 0 < p_0 < 0.5 \\ dH / dp_0 < 0 \text{ при } 0.5 < p_0 < 1, \end{cases} \quad (1.20)$$

ентропія двійкового джерела досягає максимуму, коли воно створює рівноймовірні повідомлення.

Максимальна величина ентропії становить

$$H_{\max} = -\frac{1}{2} \cdot \log \frac{1}{2} - \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \log \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1 \text{ біт/повідомлення.} \quad (1.21)$$

Ентропію джерела можна подати також сумою часткових ентропій H_0 і H_1 .

Залежності середньої питомої ентропії двійкового джерела повідомлень H та її складових – часткових ентропій H_0 і H_1 – від імовірностей появи повідомлень 0, $1 - p_0$, p_1 зображені на рис. 1.2.

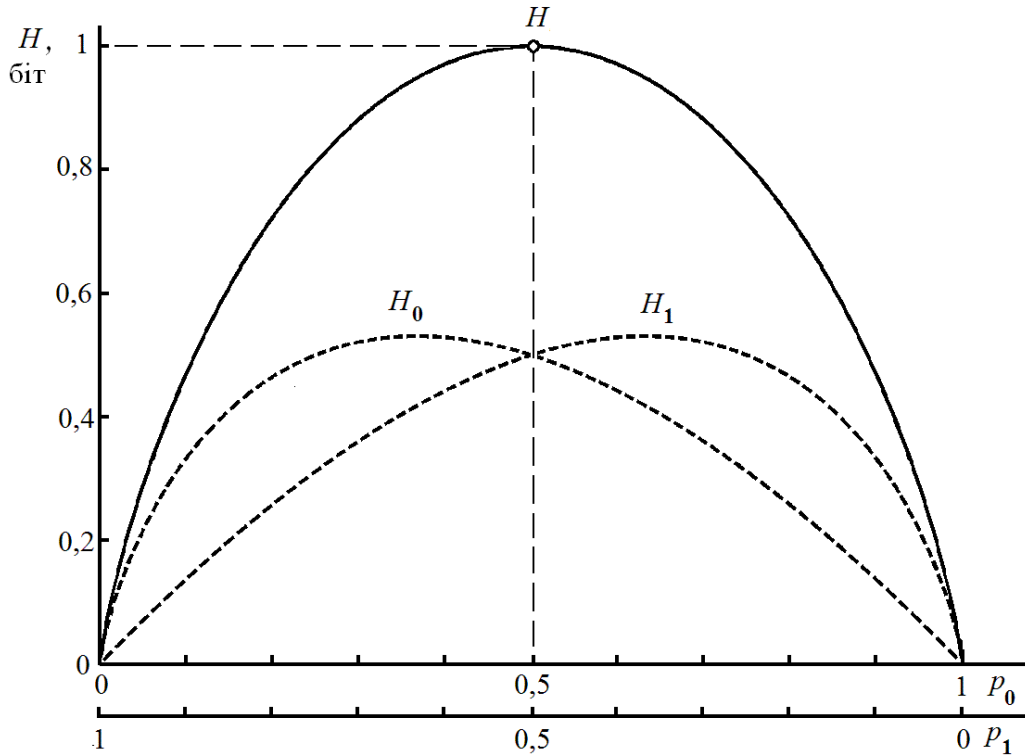


Рис. 1.2

Якщо $m > 2$, максимум ентропії джерела також буде мати місце за умови того, що вироблені їм повідомлення рівноймовірні й взаємонезалежні. Тоді $p_i = \frac{1}{m} = const$ й згідно (1.11)

$$H_{\max} = -m \cdot \frac{1}{m} \cdot \log \frac{1}{m} = \log m, \text{ біт/сигнал.} \quad (1.22)$$

Справедливість (1.22) доводиться на основі методу невизначених множників Лагранжа. При цьому розв'язується задача оптимізації цільової функції, якою виступає ентропія $H(\vec{p})$, що залежить від імовірностей повідомлень при обмеженні $\sum_{i=1}^m p_i - 1 = 0$. Функція Лагранжа та її часткові похідні для цієї задачі мають вигляд

$$L(\vec{p}, \lambda) = -\sum_{i=1}^m p_i \log p_i + \lambda \left(\sum_{i=1}^m p_i - 1 \right); \quad (1.23)$$

$$\frac{\partial L(\vec{p}, \lambda)}{\partial p_i} = -\log p_i - \frac{1}{\ln 2} + \lambda.$$

Оптимум цільової функції може досягатися, коли всі часткові похідні функції Лагранжа дорівнюють нулю, що можливо тільки за умови рівності значень $p_i = \frac{1}{m} = const$.

Тепер доведемо те, що оптимум дійсно існує і є максимумом. Для цього запишемо функцію ентропії $H(\vec{p})$ у вигляді

$$H(\vec{p}) = - \left[p_i \log p_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m-1} p_j \log p_j + \left(1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m-1} p_j - p_i \right) \log \left(1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m-1} p_j - p_i \right) \right] \quad (1.24)$$

Необхідною умовою екстремуму функції багатьох змінних є рівність нулю всіх її часткових похідних $\left. \frac{\partial H(\vec{p})}{\partial p_i} \right|_{\vec{p}=\vec{p}^*} = 0$ у точці можливого екстремуму $\vec{p} = \vec{p}^*$. Диференціюючи вираз (1.24), маємо

$$\frac{\partial H(\vec{p})}{\partial p_i} = - \left[\log p_i + \frac{1}{\ln 2} - \log \left(1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m-1} p_j - p_i \right) - \frac{1}{\ln 2} \right] = \log \left(\frac{p_m}{p_i} \right), \quad (1.25)$$

що свідчить про рівність нулю всіх часткових похідних при рівноймовірно розподілених повідомленнях $p_k = p_k^* = \frac{1}{m}$.

Достатніми умовами максимуму функції багатьох змінних є від'ємність часткових похідних другого порядку по кожній змінній $\left. \frac{\partial^2 H(\vec{p})}{\partial p_i^2} \right|_{\vec{p}=\vec{p}^*} < 0$ та чергування знаків визначників матриць, складених зі значень змішаних часткових похідних другого порядку у точці максимуму $\left\{ \left. \frac{\partial^2 H(\vec{p})}{\partial p_i \partial p_j} \right|_{\vec{p}=\vec{p}^*} \right\}_{\substack{i=1, \dots, m-1 \\ j=1, \dots, m-1}}$, при зростанні порядку визначників. Диференціюючи

вираз (1.25), маємо наступну систему рівнянь для значень елементів матриць часткових похідних другого порядку.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 H(\vec{p})}{\partial p_i^2} = - \left(\frac{1}{p_i} + \frac{1}{1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m-1} p_j - p_i} \right) = - \left(\frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_m} \right) \\ \frac{\partial^2 H(\vec{p})}{\partial p_i \partial p_j} = - \frac{1}{1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m-1} p_j - p_i} = - \frac{1}{p_m} \quad \text{при } i \neq j \end{array} \right. . \quad (1.26)$$

Тобто, для точки можливого максимуму $p_k = p_k^* = \frac{1}{m}$ виконується

$$\left\{ \begin{array}{l} \left. \frac{\partial^2 H(\vec{p})}{\partial p_i^2} \right|_{p_k = \frac{1}{m}} = -2m \\ \left. \frac{\partial^2 H(\vec{p})}{\partial p_i \partial p_j} \right|_{p_k = \frac{1}{m}} = -m \quad \text{при } i \neq j \end{array} \right. . \quad (1.27)$$

При цьому у точці можливого максимуму часткові похідні другого порядку по кожній змінній є від'ємними, а визначник другого порядку матриці, що складена зі значень часткових похідних другого порядку, становить $\Delta_2 = 4m^2 - m^2 = 3m^2$. Значення такого визначника довільного порядку n можна записати як

$$\Delta_n = (-1)^n m^n \delta_n = (-1)^n m^n \begin{vmatrix} E_{(n,n)} & (-1)_{(n,1)} \\ (1)_{(1,n)} & 2 \end{vmatrix}. \quad (1.28)$$

Тут $E_{(n,n)}$, $(-1)_{(n,1)}$, $(1)_{(1,n)}$ – одинична матриця розміру $n \cdot n$, вектор стовбець з n елементів -1 та вектор рядок з n елементів 1 відповідно. При цьому використані властивості визначників, які полягають у тому, що множник кожного елементу рядка можна виносити як множник значення визначника і те, що поелементне вирахування зі значень елементів рядка значень елементів іншого (у даному випадку останнього) рядка не змінює значення визначника. Для визначника δ_n , проводячи розкладення за останнім стовбцем, а алгебраїчних доповнень, які при цьому виникають – за останнім рядком, можна отримати

$$\delta_n = \sum_{i=1}^{n-1} (-1) \cdot (-1)^{n+i} \cdot (-1)^{n-1+i} + 2 \cdot (-1)^{2n} = n + 1. \quad (1.29)$$

Таким чином значення визначника довільного порядку Δ_n дорівнює

$$\Delta_n = (-1)^n (n + 1) m^n. \quad (1.30)$$

Тобто при зростанні порядку визначників відбувається чергування їх знаків і всі умови максимуму ентропії для рівно імовірного розподілу повідомлень виконуються.

1.5. Ентропія типових дискретних розподілів

Розв'язування багатьох задач передачі інформації засновано на моделях дослідів, у яких імовірності наслідків мають аналітичні вирази. Найпростіша модель являє собою рівномірний розподіл – дослід з m рівноймовірними взаємонезалежними наслідками.

Аналітичний вираз для рівномірного дискретного розподілу й середньої питомої ентропії джерела при рівноймовірно розподілених повідомленнях має вигляд

$$p_i = p(x_i = l) = \begin{cases} \frac{1}{m} & \text{при } 1 \leq x_i \leq m \\ 0 & \text{при } x_i < 1, x_i > m \end{cases}, \quad (1.31)$$

а його полігон зображений на рис. 1.3.

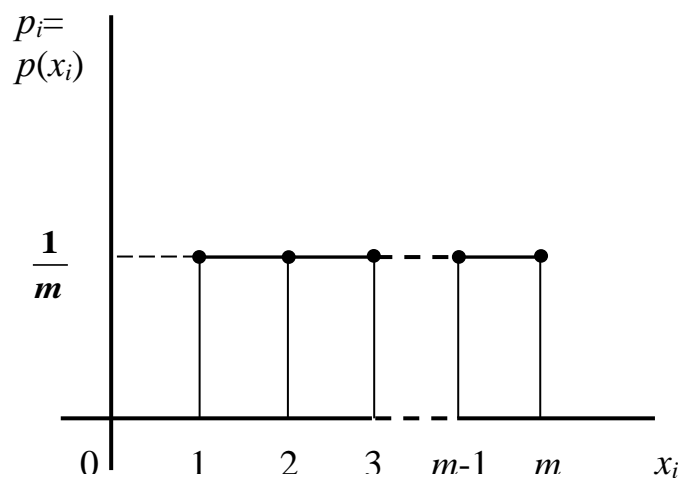


Рис. 1.3

При цьому середня питома ентропія джерела дорівнює (1.22).

Біномному розподілу, або розподілу Бернуллі підпорядковується випадкова величина, яка визначає число l появ випадкової події в послідовності з n незалежних дослідів. Розподіл описується залежностями

$$p_i = p(x_i = l) = \begin{cases} C_n^l p^l (1-p)^{n-l} & \text{при } 0 \leq x_i \leq n \\ 0 & \text{при } x_i < 0, x_i > n. \end{cases} \quad (1.32)$$

Тут p – імовірність появи випадкової події в одному досліді.

Полігон біномного розподілу наведений на рис. 1.4.

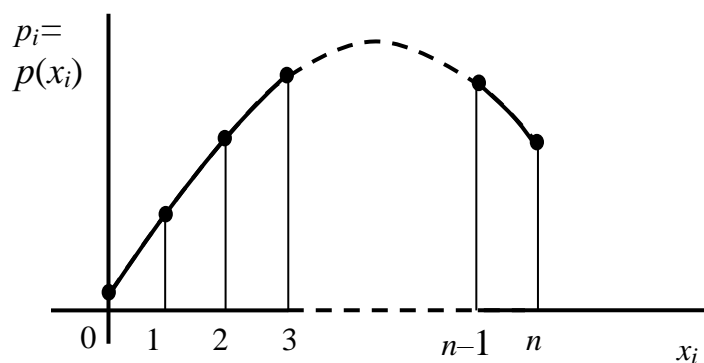


Рис. 1.4

Середня питома ентропія джерела обчислюється шляхом підстановки імовірностей (1.32) у вираз (1.11) і визначається за формулою

$$H = - \sum_{l=0}^n \left\{ C_n^l p^l (1-p)^{n-l} [\log C_n^l + l \log p + (n-l) \log(1-p)] \right\} = \text{, біт/подію. (1.33)}$$

$$= -n[p \log p + (1-p) \log(1-p)] - \sum_{l=1}^{n-1} C_n^l p^l (1-p)^{n-l} \log C_n^l$$

Біномним розподілом описуються імовірності появи помилок (трансформації елементів) кратності l у випадковій послідовності двійкових елементів довжиною n . Тут p – імовірність трансформації елементів цієї послідовності, коли елемент 0 замінюється на 1, або навпаки, 1 переходить у 0. При цьому умовні імовірності взаємної трансформації елементів дорівнюють p . Коли імовірність появи помилок мала, $p \rightarrow 0$, але $n \cdot p \rightarrow const$ біномний розподіл переходить у розподіл Пуассона, для якого вирази $p(x_i = l)$ й H приймають відповідно вигляд

$$p_i = p(x_i = l) = \begin{cases} \frac{\lambda^l e^{-\lambda}}{l!} & \text{при } x_i > 0 \\ 0 & \text{при } x_i < 0, \end{cases}, \quad (1.34)$$

$$H = - \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{\lambda^l e^{-\lambda}}{l!} (l \log \lambda - \log(l!) - \lambda) = \lambda \log \left(\frac{e}{\lambda} \right) + \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{\lambda^l e^{-\lambda}}{l!} \log(l!), \text{ біт/подію, } (1.35)$$

де $\lambda = n \cdot p$ – інтенсивність або середня кількість помилок при довжині послідовності n .

Дискретними розподілами також є геометричний та гіпергеометричний.

1.6. Ентропія неперервних розподілів

Повідомлення про стан багатьох процесів є неперервними (аналоговими) випадковими величинами, які в межах своєї зміни можуть приймати дійсні значення. Кількість таких значень нескінченна (утворює континуум). Джерела неперервних повідомлень x характеризуються функціями щільності імовірності $w(x)$.

Для визначення ентропії в цьому випадку перейдемо від неперервного розподілу до дискретного, проквантувавши випадкову величину із кроком (інтервалом) Δx (рис. 1.5)

$$\Delta x = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{m}, \quad (1.36)$$

де m – число дискретних значень x у межі зміни від X_{\min} до X_{\max} (деякі розподіли мають нескінченні межі зміни від $-\infty$ до $+\infty$).

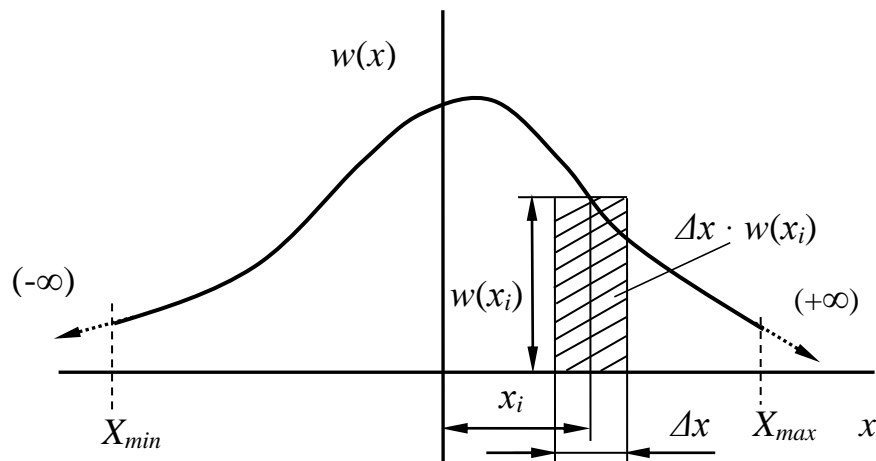


Рис. 1.5

Виберемо значення дискретної величини x_i на кроці i таким чином, щоб виконувалася умова

$$\int_{\Delta x_i} w(x) dx = w(x_i) \cdot \Delta x_i. \quad (1.37)$$

Ліва частина цього рівняння являє собою площу під кривою розподілу на інтервалі Δx_i (індекс i позначає лише номер інтервалу й $\Delta x_i = \Delta x = const$), а права – еквівалентну площу прямокутника з висотою $w(x_i)$. Ця площа дорівнює імовірності влучення випадкової величини x в інтервал Δx_i :

$$p(x_i) = w(x_i) \cdot \Delta x. \quad (1.38)$$

Використання замість неперервного подання імовірнісного розподілу випадкової величини дискретного дозволяє в подальших перетвореннях використовувати вираз (1.11) для середньої ентропії. У припущенні, що функція $w(x)$ визначена на всій числовій осі, величина ентропії дорівнює

$$H = - \sum_{i=-\infty}^{\infty} w(x_i) \cdot \Delta x \cdot \log[w(x_i) \cdot \Delta x] = - \sum_{i=-\infty}^{\infty} w(x_i) \cdot \log w(x_i) \cdot \Delta x - \sum_{i=-\infty}^{\infty} \log \Delta x \cdot w(x_i) \cdot \Delta x. \quad (1.39)$$

Перехід до межі при $\Delta x \rightarrow 0$ дає вираз

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} H = - \int_{-\infty}^{\infty} w(x) \cdot \log w(x) dx - \int_{-\infty}^{\infty} \log \Delta x \cdot w(x) dx. \quad (1.40)$$

Перший доданок називається диференціальною ентропією

$$H_D = - \int_{-\infty}^{\infty} w(x) \cdot \log w(x) dx \quad (1.41)$$

і повністю визначається виглядом функції $w(x)$.

Другий доданок – це міра невизначеності переходу від неперервного розподілу до дискретного із квантом Δx або залишкова ентропія,

$$H_3 = - \int_{-\infty}^{\infty} \log \Delta x \cdot w(x) dx = - \log \Delta x \int_{-\infty}^{\infty} w(x) dx = - \log \Delta x, \quad (1.42)$$

оскільки $\int_{-\infty}^{\infty} w(x)dx = 1$.

Те, що в (1.42) і далі присутня мала величина Δx , яка являє собою крок дискретизації функції $w(x)$, відбиває той факт, що в практичних додатках неперервна величина завжди відображається в дискретному вигляді через обмежену точність виміру.

У такий спосіб

$$H = H_D - H_3 = H_D - \log(\Delta x) = H_D + \log\left(\frac{1}{\Delta x}\right). \quad (1.43)$$

Очевидно, що при $\Delta x \rightarrow 0$, $H_3 \rightarrow \infty$ і H також нескінченно велика.

Для рівномірного розподілу щільність імовірностей якого дається за допомогою виразу

$$w(x) = \frac{1}{X_{\max} - X_{\min}} \quad (1.44)$$

і зображена на рис. 1.6.

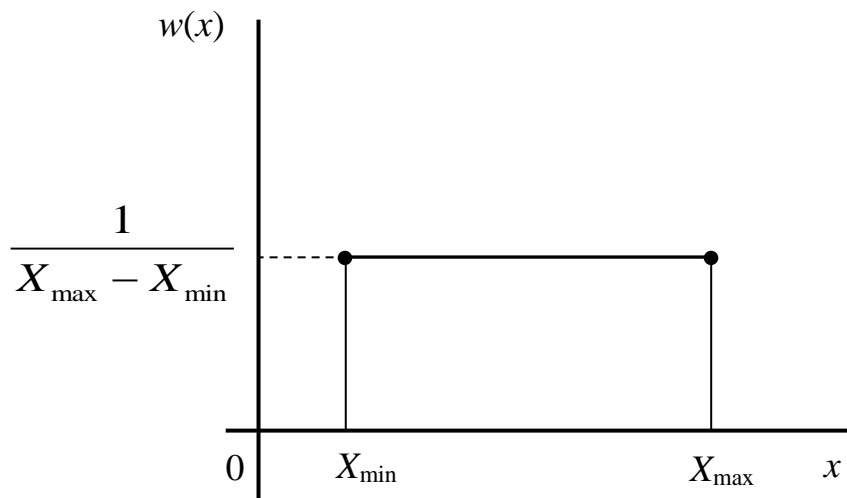


Рис. 1.6

Згідно (1.41), (1.43)

$$\begin{aligned} H_D &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{X_{\max} - X_{\min}} \cdot \log\left(\frac{1}{X_{\max} - X_{\min}}\right) \cdot dx = \\ &= - \frac{1}{X_{\max} - X_{\min}} \cdot \log\left(\frac{1}{X_{\max} - X_{\min}}\right) \cdot x \Big|_{X_{\min}}^{X_{\max}} = \log(X_{\max} - X_{\min}), \end{aligned} \quad (1.45)$$

$$H = \log(X_{\max} - X_{\min}) - \log \Delta x = \log \frac{X_{\max} - X_{\min}}{\Delta x}. \quad (1.46)$$

Найбільше на практиці поширеним є нормальний розподіл

$$w(x) = w_{\max} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2}, \quad (1.47)$$

де $w_{\max} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma}$ – максимальне значення щільності, σ – середньоквадратичне відхилення випадкової величини x від математичного очікування a . Щільність імовірностей нормального розподілу зображена на рис. 1.7.

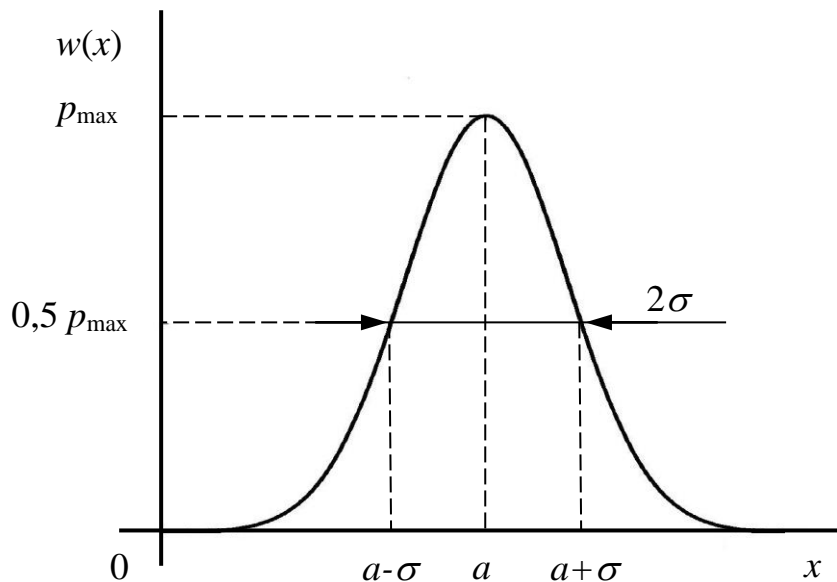


Рис. 1.7

Такому розподілу підпорядковуються випадкові помилки вимірів, які виникають внаслідок дії великої кількості незалежних факторів, кожний з яких має на помилку малий вплив. Нормальний розподіл характеризується диференціальною ентропією

$$\begin{aligned} H_D &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2} \log \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2} \right) dx = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \log \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \right) dt = \end{aligned} \quad (1.48)$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \left[\log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma}\right) - \frac{t^2}{2\sigma^2 \ln 2} \right] dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \times \\
&\times \left[\sqrt{2\pi} \cdot \sigma \cdot \log(\sigma\sqrt{2\pi}) + \frac{1}{2\sigma^2 \ln 2} \sqrt{\frac{8\pi \cdot \sigma^6}{4}} \right] = \log(\sigma\sqrt{2\pi}) + \frac{1}{2\ln 2} = \\
&= \log(\sigma\sqrt{2\pi}) + \log \sqrt{e} = \log(\sigma\sqrt{2\pi e}).
\end{aligned}$$

Тут при перетвореннях використані значення табличних інтегралів $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$, $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{4 \cdot a^3}}$.

У теорії надійності часто застосовується експонентний розподіл

$$w(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad (1.49)$$

де λ – постійна експонентного спаду випадкової величини x , яка стосовно задач надійності має сенс величини, оберненої до середнього терміну служби об'єкта.

Вираз для диференціальної ентропії експонентного розподілу має вигляд

$$H_D = -\frac{\lambda}{\ln 2} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} (\ln \lambda - \lambda x) dx = \frac{e^{-\lambda x}}{\ln 2} (\ln \lambda - \lambda x - 1) \Big|_0^{+\infty} = \frac{\ln \frac{e}{\lambda}}{\ln 2} = \log \frac{e}{\lambda}. \quad (1.50)$$

До інших поширених відносяться неперервні розподіли: Вейбулла, Коші, логарифмічно нормальний, Максвелла, Пірсона, Стюдента, трикутний (Сімпсона).

Покажемо, що максимум диференціальної ентропії джерела неперервних повідомлень H_D з фіксованим значенням дисперсії σ^2 буде мати місце за умови того, що вироблені їм повідомлення підпорядковуються нормальному розподілу.

Без обмеження загальності будемо вважати, що випадкова величина, яка є інформативною ознакою джерела неперервних повідомлень має нульове математичне очікування. Дійсно, якщо величина x характеризується функцією щільності імовірності $w(x)$ і має математичне очікування a , то величина $x - a$ характеризується функцією щільності імовірності $w(x+a)$, і має нульове математичне очікування. Нескладно довести, що дисперсії та диференціальні ентропії джерел величин x та $x - a$ будуть збігатися.

Тоді поставлене завдання полягає у мінімізації функціонала (1.36) при наявності обмежень

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x) dx = 1, \quad (1.51)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot w(x) dx = \sigma^2, \quad (1.52)$$

або у пошуку умовного екстремуму функціонала.
При цьому функція Лагранжа має вигляд

$$L(x, w, \lambda_1, \lambda_2) = -w \cdot \log(w) + \lambda_1 \cdot w + \lambda_2 \cdot x^2, \quad (1.53)$$

а рівняння Ейлера-Лагранжа для визначення шуканої функції $w(x)$

$$\frac{\partial L(x, w, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial w} = -\log(w) - \frac{1}{\ln 2} + \lambda_1 + \lambda_2 \cdot x^2 = 0. \quad (1.54)$$

Переходячи у першому доданку до основи натурального логарифму, вводячи позначки для нових невизначених множників Лагранжа, що відрізняються від старих сталими коефіцієнтами $\ln 2$, i , потенціюючи рівняння, можна отримати

$$w(x) = e^{\lambda_1' - 1 + \lambda_2' \cdot x^2}. \quad (1.55)$$

З урахуванням обмеження (1.46) рівняння зв'язку множників Лагранжа набуває вигляду

$$e^{\lambda_1' - 1} \sqrt{\frac{\pi}{-\lambda_2'}} = 1. \quad (1.56)$$

Використовуючи обмеження (1.47) отримується рівняння для визначення другого множника Лагранжа

$$\sqrt{\frac{-\lambda_2'}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4 \cdot (-\lambda_2')^3}} = -\frac{1}{2 \cdot \lambda_2'} = \sigma^2. \quad (1.57)$$

Таким чином, з урахуванням (1.55) та (1.56), шукана функція щільності імовірності остаточно набуває вигляду

$$w(x) = e^{\lambda_1' - 1 - \frac{x^2}{2 \cdot \sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{x^2}{2 \cdot \sigma^2}}. \quad (1.58)$$

Порівняємо значення диференціальної ентропії джерел неперервних повідомлень H_D з фіксованим значенням дисперсії σ^2 , які підпорядковуються нормальному та рівномірному розподілам. У випадку нормального розподілу згідно (1.48) величина диференціальної ентропії становить

$$H_D = \log(\sigma\sqrt{2\pi e}) = \log \sigma + \frac{1}{2} \log(2\pi e). \quad (1.59)$$

Для випадку рівномірного розподілу з урахуванням того, що для нього величина дисперсії дорівнює $\sigma^2 = \frac{(X_{\max} - X_{\min})^2}{12}$, та згідно (1.45) ця величина складає

$$H_D = \log(X_{\max} - X_{\min}) = \log \sigma + \frac{1}{2} \log 12. \quad (1.60)$$

Вирази (1.59) та (1.60) наочно показують, що для джерел неперервних повідомлень які підпорядковуються нормальному та рівномірному розподілам з однаковими значенням дисперсії, диференціальна ентропія більше у випадку рівномірного розподілу.

1.7. Ентропія ергодичних послідовностей

Якщо властивості джерела повідомлень, установлені в п. 1.2, містять у собі взаємозалежність появи елементів у послідовностях цих сигналів, то таке джерело називають ергодичним.

Для нього імовірність появи чергового елемента послідовності x_j

$$p(x_j / x_i^{(1)}, x_h^{(2)}, \dots, x_v^{(r)}, x_q^{(r+1)}) = p(x_j / x_i^{(1)}, x_h^{(2)}, \dots, x_v^{(r)}) \quad (1.61)$$

залежить тільки від того, які « r » елементів йому передують, а величина « r » називається порядком ергодичного джерела.

Якщо імовірнісні властивості джерела незмінні, то послідовність, що воно виробляє, також називають ергодичною.

Черговий набір з r елементів визначає стан джерела S_k , з якого він при надходженні елемента x_j перейде в стан S_l .

Число можливих станів S_k ергодичного джерела – це кількість всіх можливих сполучень із m по r ,

$$N = m^r, \quad (1.62)$$

де m – основа алфавіту джерела.

Нехай двійкове ергодичне джерело характеризується величиною $r=2$. Тоді можливе число станів джерела $N=2^2=4$, а самі стани S_k – це двійкові комбінації: $S_1 - 00$, $S_2 - 01$, $S_3 - 10$, $S_4 - 11$. У прикладі послідовності повідомлень джерела 01001110110... такі комбінації виділені на рис. 1.8.

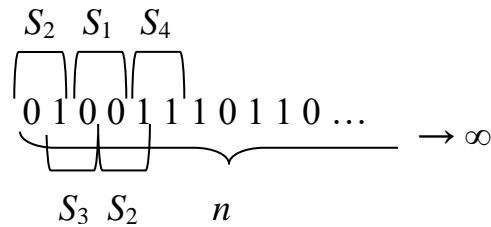


Рис. 1.8

Тут джерело послідовно переходить зі стану S_2 в S_3 , далі в S_1 , S_2 , S_4 і т.д.

Якщо розглядати ряд аналогічних послідовностей досить великої довжини (у загальному випадку залежної від величин m і r), то імовірнісні характеристики джерела – безумовні імовірності $p(0)$, $p(1)$ і умовні імовірності $p(x_j/x_i, x_h)$, $x_j, x_i, x_h \in \{0,1\}$ для будь-якої такої послідовності будуть тими самими.

Коли джерело перебуває в стані S_l , то є невизначеність, з якого стану S_k воно у нього перейшло. Міра цієї невизначеності – ентропія, яка визначається згідно (1.11) та становить

$$H(S_k) = -\sum_{l/k} p(S_l/S_k) \cdot \log p(S_l/S_k). \quad (1.63)$$

Усреднюючи ентропію (1.63) по всіх станах S_k з імовірностями $p(S_k)$, одержимо середню ентропію ергодичного джерела

$$H = -\sum_{k=1}^N \sum_{l/k} p(S_k) \cdot p(S_l/S_k) \cdot \log p(S_l/S_k). \quad (1.64)$$

1.8. Ентропія найпростіших ергодичних джерел

1. $r=0$. Це значить, що елементи послідовності взаємонезалежні. Джерело має лише один стан S_0 з $p(S_0)=1$ і вертається в нього після надходження чергового елемента x_j . Тоді $p(S_0/S_0)=p(x_j)$ й (1.49) перетвориться до вигляду

$$H = -\sum_{k=1}^1 \sum_{j=1}^m 1 \cdot p(x_j) \cdot \log p(x_j) = -\sum_{j=1}^m p(x_j) \cdot \log p(x_j), \quad (1.65)$$

що відповідає (1.11).

2. $r=1$. Тут імовірність переходу з одного стану джерела в інше $p(S_l/S_k) = p(x_j/x_i)$, можливе число таких переходів дорівнює m , як і кількість станів джерела. Імовірність знаходження джерела в стані S_k , $p(S_k) = p(x_k) = p(x_i)$. Тоді

$$H = -\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m p(x_i) \cdot p(x_j/x_i) \cdot \log p(x_j/x_i) = -\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m p(x_i, x_j) \cdot \log p(x_j/x_i). \quad (1.66)$$

3. $r=2$. Імовірність переходу $p(S_l/S_k) = p(S_{ij}/S_{hi}) = p(x_j/x_h, x_i)$, а число станів джерела, у випадку $r=2$, $S_k = S_{hi}$ – це число пар x_h, x_i , яке дорівнює m^2 . При цьому $\sum_{h=1}^m \sum_{i=1}^m p(S_{hi}) = \sum_{h=1}^m \sum_{i=1}^m p(x_h, x_i) = 1$. Число переходів S_{ij}/S_{hi} дорівнює основі алфавіту m (кількості можливих значень елемента j). З урахуванням отриманих співвідношень

$$\begin{aligned} H &= -\sum_{h=1}^m \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m p(x_h, x_i) \cdot p(x_j/x_h, x_i) \cdot \log p(x_j/x_h, x_i) = \\ &= -\sum_{h=1}^m \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m p(x_h, x_i, x_j) \cdot \log p(x_j/x_h, x_i) \end{aligned} \quad (1.67)$$

На основі властивостей ергодичних джерел К. Шеннон показав можливість передачі інформації з як завгодно великою точністю в каналах з перешкодами.

1.9. Ентропія двопозиційних ергодичних джерел

Формули для ентропії ергодичних джерел дискретних повідомлень (1.65) – (1.67) передбачають їх однозначний характер. В той самий час у цифрових інформаційних системах телемеханіки (керування на відстані) поширені двопозиційні повідомлення.

Згідно ДОСТ 26.205–88 джерелами двопозиційних повідомлень в системах телемеханіки є ланцюги введу двопозиційних команд телеуправління (ТУ) та повідомлень спорадичної телесигналізації (ТСС) при використанні методу забезпечення достовірності – вирішального зворотного зв'язку (перезапиту). Прикладом двопозиційних команд (повідомлень) може бути: «Увімкнути»/«Вимкнути» i об'єкт. Для забезпечення своєчасної доставки

повідомлень в багатоканальній системі передачі інформації за допомогою цього метода повідомлення формується та передається тільки в моменти зміни стану об'єкту ТУ (ТСС). Ця передача при відсутності помилки та наступного перезапиту є однократною, а прийняте повідомлення буде зберігатися на прийомній стороні до чергової зміни стану об'єкту ТУ (ТСС). Звідси випливає, що з потоку повідомлень від одного й того самого об'єкту виключається виникнення послідовних однотипних повідомлень, наприклад вигляду: «Увімкнути» i об'єкт. Це приводить до наявності статистичної залежності повідомлень в імовірнісній моделі системи передачі інформації. Тим не менш, в системах телемеханіки двопозиційні повідомлення, що відповідають різним станам одного об'єкта, вважаються різними та кодуються різними кодовими комбінаціями. За цією причиною ентропії джерел однозначних та двопозиційних повідомлень з однаковими імовірнісними розподілами мусять бути різними.

1. $r=0$. Оскільки за досить тривалий проміжок часу число переходів j -го об'єкта з одного стану в інший і в зворотному напрямку в середньому однакове, для одиничного опитування імовірності появи повідомлень $p(x_{j1})$ «Увімкнути» та $p(x_{j2})$ «Вимкнути» однакові, тобто $p(x_{j1}) = p(x_{j2}) = 0,5 p(x_j)$. Тоді для середньої питомої ентропії такого джерела повідомлень можна записати:

$$H = -\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^2 p(x_{jk}) \log p(x_{jk}) = -\sum_{j=1}^m p(x_j) \log [0,5 p(x_j)] = 1 - \sum_{j=1}^m p(x_j) \log p(x_j). \quad (1.68)$$

Тут другий доданок являє собою середню питому ентропію джерела m незалежних несумісних дискретних повідомлень, а перший доданок (додатковий біт) несе інформацію про конкретний варіант двопозиційного повідомлення («Увімкнути» або «Вимкнути»).

2. $r=1$. Якщо позначити імовірність появи при двох послідовних опитуваннях повідомлення i -го об'єкту і повідомлення «Увімкнути» j -го об'єкту як $p(x_i, x_{j1})$, імовірність повідомлення i -го об'єкту і повідомлення «Вимкнути» j -го об'єкту як $p(x_i, x_{j2})$, а відповідні умовні імовірності як $p(x_{j1}/x_i)$ та $p(x_{j2}/x_i)$, то, керуючись тими самими міркуваннями, що й у випадку джерела незалежних повідомлень, можна записати:

$$p(x_i, x_{j1}) = p(x_i, x_{j2}) = 0,5 p(x_i, x_j); \quad (1.69)$$

$$p(x_{j1}/x_i) = \frac{p(x_i, x_{j1})}{p(x_i)} = p(x_{j2}/x_i) = \frac{p(x_i, x_{j2})}{p(x_i)} = 0,5 p(x_j/x_i) = \frac{0,5 p(x_i, x_j)}{p(x_i)}. \quad (1.70)$$

Тоді ентропія джерела, що розглядається згідно з урахуванням двопозиційного характеру повідомлень, становитиме

$$\begin{aligned}
H &= -\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^2 p(x_{jk}, x_i) \log \left[p(x_{jk} / x_i) \right] = -\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m p(x_i, x_j) \log \left[0,5 p(x_j / x_i) \right] = \\
&= 1 - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m p(x_i, x_j) \log \left[p(x_j / x_i) \right].
\end{aligned} \tag{1.71}$$

Також показано, що для довільного значення порядку ергодичного джерела r у співвідношеннях, які визначають ентропії джерел залежних повідомлень, так само як і у виразах (1.68), (1.71), додатковий біт несе інформацію про конкретний вигляд двопозиційного повідомлення.

1.10. Ентропія об'єднання дослідів. Умовна ентропія

Об'єднанням дослідів називаються спільні досліди із взаємозалежними наслідками. Приклад об'єднання – дія джерела й приймача сигналів при передачі сигналів через канал з перешкодами.

Джерело виробляє сигнали $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_m$, а приймач приймає $y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_m$, які можуть відповідати сигналам джерела чи ні. При цьому задані розподіли безумовних імовірностей $p(x_1), p(x_2), \dots, p(x_i), \dots, p(x_m)$, а також умовних імовірностей $p(y_j/x_i), p(x_i/y_j)$.

Як відомо, безумовні й умовні імовірності в спільних дослідах зв'язані виразом

$$p(x_i, y_j) = p(y_j, x_i) = p(x_i) \cdot p(y_j / x_i) = p(y_j) \cdot p(x_i / y_j). \tag{1.72}$$

Процес передачі сигналів відображається графом каналу (рис. 1.9) або каналною матрицею

$$M(p(y/x)) = \begin{pmatrix} p(y_1/x_1) & p(y_2/x_1) & \dots & p(y_{m-1}/x_1) & p(y_m/x_1) \\ p(y_1/x_2) & p(y_2/x_2) & \dots & p(y_{m-1}/x_2) & p(y_m/x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p(y_1/x_{m-1}) & p(y_2/x_{m-1}) & \dots & p(y_{m-1}/x_{m-1}) & p(y_m/x_{m-1}) \\ p(y_1/x_m) & p(y_2/x_m) & \dots & p(y_{m-1}/x_m) & p(y_m/x_m) \end{pmatrix}. \tag{1.73}$$

Дія перешкод приводить до того, що передаючи сигнал x_i , на боці приймача можемо одержувати різні сигнали y_j , що й відображається графом і каналною матрицею.

Вибором якісних ознак сигналів (частоти, фази та ін.) з урахуванням характеристик перешкод забезпечуються найбільші значення умовних імовірностей на головній діагоналі матриці, чим і досягається найбільш достовірна передача сигналів.

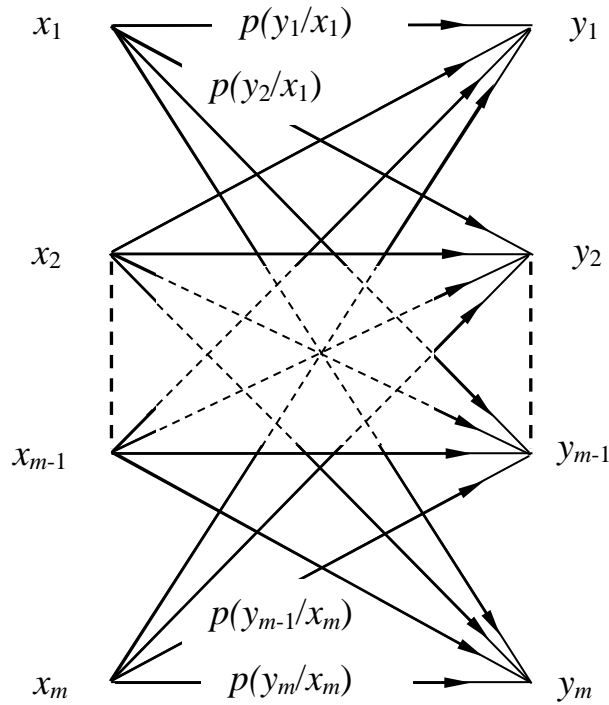


Рис. 1.9

Оскільки згідно (1.11), ентропія об'єднання визначається як

$$\begin{cases} H(X, Y) = -\sum_i \sum_j p(x_i, y_j) \cdot \log p(x_i, y_j) \\ H(Y, X) = -\sum_i \sum_j p(y_j, x_i) \cdot \log p(y_j, x_i), \\ H(X, Y) = H(Y, X) \end{cases} \quad (1.74)$$

з урахуванням (1.72)

$$\begin{aligned} H(X, Y) &= -\sum_i \sum_j p(x_i) \cdot p(y_j / x_i) \cdot \log [p(x_i) \cdot p(y_j / x_i)] = \\ &= -\sum_i p(x_i) \cdot \log p(x_i) \cdot \sum_j p(y_j / x_i) - \\ &\quad -\sum_i p(x_i) \cdot \sum_j p(y_j / x_i) \cdot \log p(y_j / x_i) = H(X) + H(Y / X). \end{aligned} \quad (1.75)$$

У перетвореннях (1.75) використані заміни подвійних сум вкладеними, а умовні імовірності, як відомо, задовольняють співвідношенню

$$\sum_j p(y_j / x_i) = 1. \quad (1.76)$$

У формулі (1.75) перший доданок – це ентропія джерела $H(X)$, а $H(Y/X)$ – середня умовна ентропія – міра невизначеності того, що ансамбль прийнятих сигналів Y відповідає ансамблю переданих X . Ця ентропія складається із часткових умовних ентропій

$$H(Y/x_i) = -\sum_j p(y_j/x_i) \cdot \log p(y_j/x_i), \quad (1.77)$$

тобто часткова умовна ентропія – це міра невизначеності прийнятого ансамблю Y щодо переданого сигналу x_i , а ентропія $H(Y/X)$ виходить шляхом їхнього усереднення з урахуванням розподілу безумовних імовірностей $p(x_i)$

$$\begin{aligned} H(Y/X) &= \sum_i p(x_i) \cdot H(Y/x_i) = \\ &= -\sum_i p(x_i) \cdot \sum_j p(y_j/x_i) \cdot \log p(y_j/x_i) = \\ &= -\sum_i \sum_j p(y_j, x_i) \cdot \log p(y_j/x_i). \end{aligned} \quad (1.78)$$

На підставі (1.72), (1.74) і (1.75) також можна записати

$$H(Y, X) = H(Y) + H(X/Y). \quad (1.79)$$

Умовні імовірності $p(y_j/x_i)$ можуть приймати граничні значення $p(y_j/x_i) = 1$, якщо прийняті сигнали такі самі, як і передані (або існує детермінований зв'язок між прийнятими і переданими сигналами) й $p(y_j/x_i) = p(y_j)$, якщо який-небудь зв'язок між переданими й прийнятими сигналами відсутній.

У першому випадку

$$H(X, Y) = H(X) - \sum_i p(x_i) \cdot \sum_j 1 \cdot \log 1 = H(X), \quad (1.80)$$

або $H(Y, X) = H(Y)$.

У другому

$$\begin{aligned} H(X, Y) &= H(X) - \sum_i p(x_i) \cdot \sum_j p(y_j/x_i) \cdot \log p(y_j/x_i) = \\ &= H(X) - \sum_i p(x_i) \cdot \sum_j p(y_j) \log p(y_j) = H(X) + H(Y). \end{aligned} \quad (1.81)$$

Ентропія об'єднання тут досягає максимуму, а передача інформації від джерела до приймача відсутня.

1.11. Пропускна спроможність дискретного каналу без перешкод

У цьому каналі інформація, яка виробляється джерелом, без втрат доставляється приймачу.

Пропускна спроможність каналу – це максимальна кількість інформації, що може бути передана по каналу зв'язку в одиницю часу

$$C_{II} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{J(T)_{\max}}{T}. \quad (1.82)$$

Тут $J(T)_{\max}$ – максимально можлива кількість інформації, вироблена джерелом за час T .

Вище було показано, що $J(T)_{\max}$ досягається для джерела, яке виробляє рівноймовірні й взаємонезалежні повідомлення.

Далі розглядається випадок, коли повідомлення являють собою послідовності довжиною n при алфавіті з основою m . Максимальне число різних слів (повідомлень) становить $N_{\max} = m^n$; а на інтервалі часу T може бути створено $N(T)_{\max} = m^{n(T)}$ повідомлень.

Згідно (1.2) вираження (1.82) можна записати у вигляді

$$C_{II} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\log N(T)_{\max}}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\log m^{n(T)}}{T}. \quad (1.83)$$

Нехай елементи послідовності відображаються сигналами з тривалістю τ , тоді $n(T) = \frac{T}{\tau}$ і

$$C_{II} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\log m^{\frac{T}{\tau}}}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\frac{T}{\tau} \log m}{T} = \frac{1}{\tau} \log m. \quad (1.84)$$

Величина $U = \frac{1}{\tau}$, с^{-1} називається швидкістю передачі сигналів. У системах зв'язку для неї використовується також одиниця виміру Бод, с^{-1} . Оскільки згідно (1.22) для джерела, повідомлення якого становлять символи з основою алфавіту m , максимальне значення ентропії дорівнює $H_{\max} = \log m$, пропускна спроможність дискретного каналу без перешкод становить

$$C_{II} = U \cdot H_{\max}, \text{ біт/с}. \quad (1.85)$$

У системах передачі інформації реальні значення ентропії джерел

задовольняють умові $H < H_{\max}$ і швидкість передачі інформації $C = U \cdot H < C_{II}$.

Збільшити значення C можливо, використовуючи більш швидкісні канали зв'язку (наприклад, замість електричних провідних – волоконнооптичні) або застосовуючи так зване оптимальне кодування повідомлень джерела, що дозволяє збільшити його ентропію.

1.12. Пропускна спроможність каналу з перешкодами (статистичний підхід)

Використовуючи поняття умовної ентропії як залишкової невизначеності при проведенні сполучення наслідків в об'єднанні дослідів (дія джерела, каналу й приймача повідомлень), кількість інформації, що досягла приймача, за час T може бути записана у вигляді

$$J = H(Y) - H(Y/X) \text{ або } J = H(X) - H(X/Y). \quad (1.86)$$

Тоді, з огляду на (1.85), у загальному випадку пропускна спроможність каналу з перешкодами складе

$$C_{II}^3 = U \cdot \max(H) = U \cdot \max\{H(Y) - H(Y/X)\} = U \cdot \max\{H(X) - H(X/Y)\}. \quad (1.87)$$

Таким чином, для визначення C_{II}^3 необхідно знайти максимум функції $\{H\}$. Рішення цієї задачі покажемо на прикладі так званого двійкового симетричного каналу без пам'яті.

У цьому випадку джерело створює сигнали x_0, x_1 з безумовними імовірностями $p(x_0), p(x_1)$, а симетричний канал характеризується рівністю умовних імовірностей переключення двійкових символів які дорівнюють p

$$p(y_0/x_1) = p(y_1/x_0) = p \text{ і } p(y_0/x_0) = p(y_1/x_1) = 1 - p. \quad (1.88)$$

Термін «без пам'яті» визначає той факт, що джерело створює взаємозалежні сигнали, тут x_0, x_1 і $p(x_0) + p(x_1) = 1$.

Граф розглянутого каналу наведений на рис. 1.10.

Очевидно, що максимум функції (1.88) досягається при $H(Y)_{\max}, H(X)_{\max}$, якщо при цьому умовні ентропії $H(Y/X), H(X/Y)$ залежать лише від властивостей каналу й не залежать від властивостей джерела й приймача.

Відповідно до формули повної імовірності

$$p(y_j) = \sum_{i=1}^m p(y_j/x_i) \cdot p(x_i). \quad (1.89)$$

Тоді

$$\begin{aligned}
 p(y_0) &= p(y_0/x_0) \cdot p(x_0) + p(y_0/x_1) \cdot p(x_1) = \\
 &= (1-p) \cdot p(x_0) + p \cdot p(x_1) = p(x_0) - p \cdot p(x_0) + p \cdot p(x_1) = \\
 &= p(x_0) + p[p(x_1) - p(x_0)].
 \end{aligned}
 \tag{1.90}$$

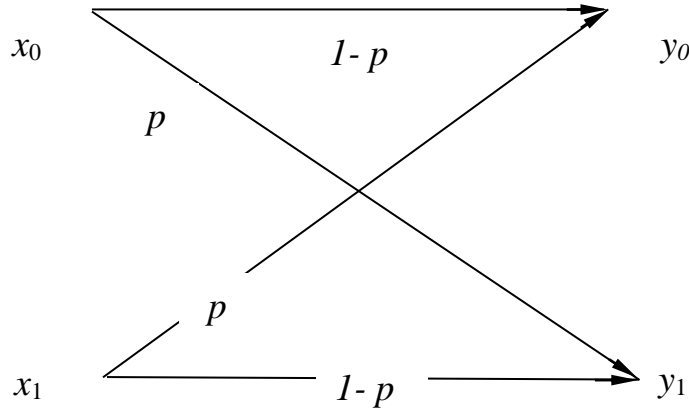


Рис. 1.10

Джерело створює максимум інформації, коли $p(x_1) = p(x_0)$ й у цьому випадку $p(y_0) = p(x_0) = p(y_1)$.

Отже, максимум ентропії $H(Y)_{\max}$ досягається при максимумі $H(X)_{\max}$.

Згідно (1.21) для двійкового джерела $H_{\max} = 1$ біт/сигнал, тобто в співвідношенні (1.87) $H(Y) = 1$ біт/сигнал.

Умовна ентропія за виразом (1.78) у розглянутому прикладі зводиться до вигляду

$$\begin{aligned}
 H(Y/X) &= -\{p(x_0) \cdot [p(y_0/x_0) \cdot \log p(y_0/x_0) + p(y_1/x_0) \cdot \log p(y_1/x_0)] + \\
 &+ p(x_1) \cdot [p(y_0/x_1) \cdot \log p(y_0/x_1) + p(y_1/x_1) \cdot \log p(y_1/x_1)]\} = \\
 &= -\{p(x_0) \cdot [(1-p) \cdot \log(1-p) + p \cdot \log p] + \\
 &+ p(x_1) \cdot [p \cdot \log p + (1-p) \cdot \log(1-p)]\} = \\
 &= -[p(x_0) + p(x_1)] \cdot [p \cdot \log p + (1-p) \cdot \log(1-p)] = \\
 &= -p \cdot \log p - (1-p) \cdot \log(1-p).
 \end{aligned}
 \tag{1.91}$$

Отриманий результат показує, що $H(Y/X)$ залежить тільки від властивостей даного каналу й не залежить від розподілів безумовних імовірностей, з якими джерело створює сигнали.

Таким чином, (1.87) остаточно здобуває вигляд

$$C_{II}^3 = U \cdot [1 + p \cdot \log p + (1 - p) \cdot \log(1 - p)], \text{ біт/с.} \quad (1.92)$$

Графік цієї залежності зображений на рис. 1.11.

При граничних значеннях імовірності перекручення двійкового символу (помилкового прийому сигналів) $p = 0$, $p = 1$ пропускна спроможність каналу досягає максимуму, $C_{II}^3 = |U|$, а при $p = 0,5$ $C_{II}^3 = 0$.

Варто зазначити, що якщо $p > 0,5$, має місце негативний режим роботи каналу, коли сигнал x_0 розпізнається як y_1 , а x_1 , як y_0 . Крім того, зменшення пропускної спроможності каналу до нуля при $p = 0,5$ – наслідок використання статистичної моделі каналу.

Як буде викладено нижче, пропускна спроможність існує для каналів із як завгодно великим впливом перешкод на передані сигнали.

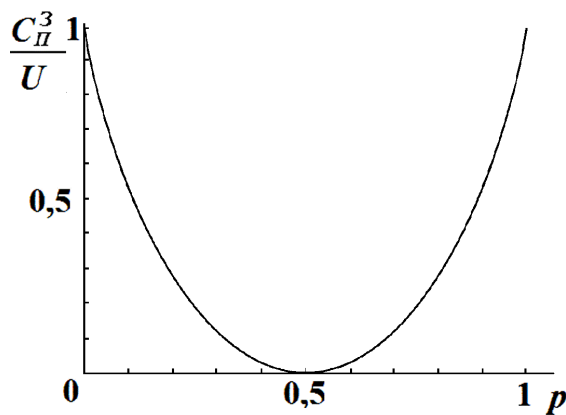


Рис. 1.11

Становить інтерес різновид розглянутого каналу, у якого приймач за певних умов не може розпізнати прийнятий сигнал як y_0 або y_1 (двійковий симетричний канал зі стиранням). Це може бути, наприклад, у тому випадку, якщо для передачі сигналів x_0 і x_1 використовуються різнополярні імпульси постійного струму.

Граф цього каналу показаний на рис. 1.12.

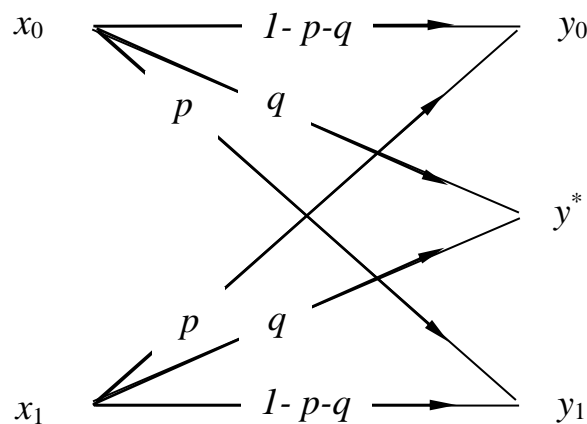


Рис. 1.12

Канал, у якого прийнятий сигнал може не розпізнатися (приймач при цьому переходить у стан y^* з імовірністю q), називається каналом зі стиранням. Для нього пропускна спроможність визначається як

$$C_{II}^3 = U \cdot \{(1-q) \cdot [1 - \log(1-q)] + (1-p-q) \cdot \log(1-p-q) + p \cdot \log p\}, \text{ біт/с. (1.93)}$$

1.13. Пропускна спроможність каналу з перешкодами (енергетичний підхід)

Вище задача визначення пропускної спроможності каналу з перешкодами була розглянута, виходячи зі статистичних характеристик об'єкта, що впливають на передачу інформації.

Носієм інформації в сигналі є його енергія, тому К. Шеннон вирішив задачу передачі інформації в каналі із цієї позиції.

Розглянемо неперервний випадковий процес $x(t)$, що є сигналом джерела інформації. У каналі зв'язку на цей процес накладається перешкода $x_3(t)$; обидві ці складові підсумуються за миттєвим значенням, так що в каналі створюється перекручений сигнал

$$x'(t) = x(t) + x_3(t). \quad (1.94)$$

Перейдемо від неперервного подання величини $x'(t)$ до дискретного за часом і за множиною значень. Такий перехід здійснюється шляхом квантування за часом із кроком (квантом) Δt , а за множиною значень – із квантом Δx . На рис. 1.13 наданий графік залежності величини $x'(t)$, тут кружками показані відліки її значень у моменти часу t_i , а прямокутниками – відповідні величини, які квантовані за рівнем.

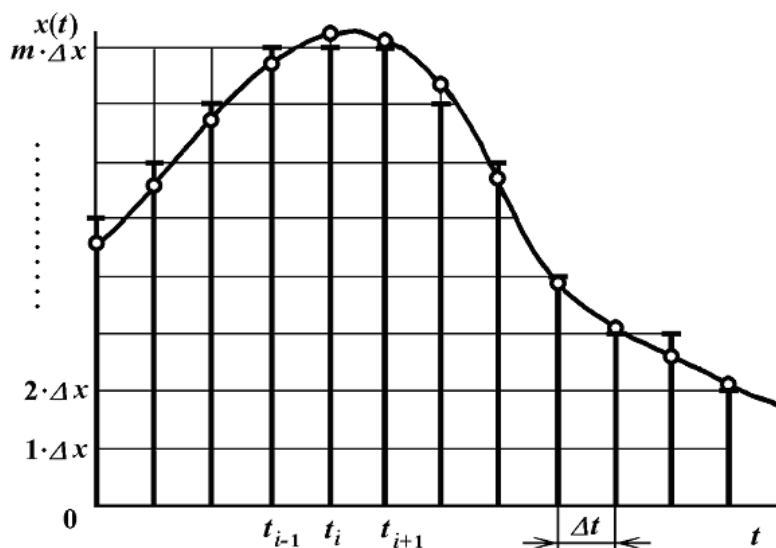


Рис. 1.13

За теоремою Котельникова, якщо спектр $x'(t)$ обмежений зверху частотою F_B , то такий неперервний процес точно відображається послідовністю його відліків у моменти часу t_i , що мають інтервал

$$\Delta t = \frac{1}{2F_B}. \quad (1.95)$$

Квантування відліків $x'(t_i)$ за рівнем обмежує кількість можливих значень сигналу величиною

$$m = E \left[\frac{x_{\max}}{\Delta x} \right] + 1, \quad (1.96)$$

де x_{\max} – максимально можливе значення величини сигналу, E – функція округлення результату ділення. Вираз записано в припущенні, що мінімально можливе значення величини сигналу $x_{\min} = 0$.

Внаслідок дискретизації на інтервалі часу T створюється $n(T) = \frac{T}{\Delta t}$ відліків випадкової величини $x'(t_i)$, які при виконанні умови (1.80) будуть взаємонезалежними. Тоді на інтервалі T може бути отримано максимум

$$N(T) = m^{n(T)} \quad (1.97)$$

варіантів дискретних повідомлень у процесі $x'(t)$. З урахуванням (1.95) останній вираз перетвориться до вигляду

$$N(T) = m^{2TF_B}. \quad (1.98)$$

Враховуючи сформульовані вище припущення про властивості сигналу, можна стверджувати, що таке джерело створює кількість інформації, максимальне значення якої становить

$$J_C(T) = \log N(T) = \log m^{2TF_B} = 2TF_B \cdot \log m. \quad (1.99)$$

З метою спрощення наступних перетворень припускається, що функції щільностей імовірностей значень сигналу $w(x)$ та перешкоди $w(x_3)$ відомі й однакові, наприклад, є рівномірними з параметрами, що збіглись.

Тоді величина m^2 у рівнянні (1.99) з коефіцієнтом A пропорційна середній потужності сигналу P_C (перешкоди P_3) і цей вираз може бути записаний у вигляді

$$J_C(T) = TF_B \cdot \log(AP_C). \quad (1.100)$$

Перешкода, що діє в цій самій смузі частот, що й сигнал, за аналогією, буде характеризуватися кількістю шумової інформації

$$J_3(T) = TF_B \cdot \log(AP_3). \quad (1.101)$$

Тому що перешкода адитивна, у каналі зв'язку передається потужність $P_K = P_C + P_3$, з якою пов'язана кількість інформації

$$J_K(T) = TF_B \cdot \log[A(P_C + P_3)]. \quad (1.102)$$

Кількість інформації, що доставляється на вхід приймача від джерела інформації, у свою чергу становить

$$J(T) = J_K(T) - J_3(T) = TF_B \cdot \log\left(1 + \frac{P_C}{P_3}\right). \quad (1.103)$$

З останнього виразу випливає, що передача необхідної кількості інформації можлива при будь-якому, як завгодно малому, відношенні $\frac{P_C}{P_3}$, тому що при цьому значення логарифма, що входить до виразу є додатним.

Дана формула справедлива й у тих випадках, коли смуга частот обмежена знизу значенням $F_H > 0$, тоді замість F_B використовується значення $\Delta F = F_B - F_H$, і формула набуває вигляд

$$J(T) = T \cdot \Delta F \cdot \log\left(1 + \frac{P_C}{P_3}\right). \quad (1.104)$$

Пропускна спроможність розглянутого каналу визначається як

$$C_{II}^3 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{J(T)}{T} = \Delta F \cdot \log\left(1 + \frac{P_C}{P_3}\right), \quad (1.105)$$

тобто пропорційна ширині смуги частот ΔF , однакової для сигналу, перешкоди й каналу.

На практиці поширені випадки каналів зв'язку з вузькосмуговим сигналом і широкосмуговою перешкодою, при яких співвідношення між шириною смуг частот сигналу й каналу становить $\Delta F_C \ll \Delta F_3$. Дослідимо

пропускну спроможність такого каналу. Для цього перетворимо вираз (1.90) при $\Delta F = F_B$, зобразивши потужність перешкоди як

$$P_s = p_0 F_B, \quad (1.106)$$

де p_0 – питома потужність перешкоди в смузі частот 1 Гц, Вт/Гц. Тоді зазначений вираз набуває вигляд

$$C_{II}^3(F_B) = F_B \cdot \log\left(1 + \frac{P_C}{p_0 F_B}\right) = F_B \cdot \log\left(1 + \frac{F_0}{F_B}\right) = \frac{\log\left(1 + \frac{F_0}{F_B}\right)}{\frac{1}{F_B}}, \quad (1.107)$$

тут F_0 – смуга частот, де потужність перешкоди дорівнює потужності сигналу.

Аналізована залежність $C_{II}^3 = C_{II}^3(F_B)$ має невизначеності в граничних випадках при F_B , що дорівнює 0, і $+\infty$. Для їхнього розкриття скористаємося правилом Лопітала. Функція, що зображує відношення похідних чисельника й знаменника у виразі (1.107), має вигляд

$$f(F_B) = \frac{F_0 \cdot F_B}{(F_0 + F_B) \cdot \ln 2}. \quad (1.108)$$

Відповідно шукані межі складуть

$$\lim_{F_B \rightarrow 0} C_{II}^3(F_B) = \lim_{F_B \rightarrow 0} f(F_B) = 0, \quad (1.109)$$

$$\lim_{F_B \rightarrow \infty} C_{II}^3(F_B) = \lim_{F_B \rightarrow \infty} f(F_B) = \frac{|F_0|}{\ln 2}, \text{ біт/с}, \quad (1.110)$$

а графік залежності (1.107) буде мати вигляд, зображений на рис. 1.14.

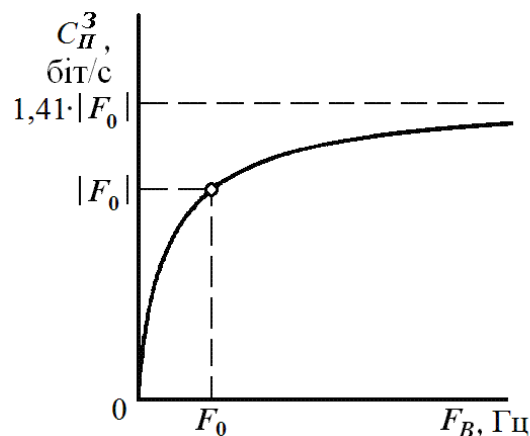


Рис. 1.14

На практиці смуга частот каналу із широкосмуговою перешкодою обмежується величиною порядку $F_B = F_0$. При цьому відповідне значення пропускної спроможності каналу становить

$$C_H^3(F_0) = |F_0|, \text{ біт/с.} \quad (1.111)$$

Тут символ модуля означає чисельну рівність значень частоти F_0 й пропускної спроможності каналу.

1.14. Чинники обмеження пропускної спроможності каналів зв'язку різного фізичного походження

Згідно співвідношення (1.105) чинниками, які впливають на пропуску спроможність каналів зв'язку, є ширина смуги частот каналу та відношення потужностей сигналу та перешкоди, що діють в каналі.

Розглянемо обмеження щодо ширини смуги частот і, відповідно, пропускної спроможності та швидкості передачі даних каналів зв'язку різної фізичної основи. Основними видами магістральних каналів зв'язку за цією ознакою є кабельні електричні та оптичні і бездротові радіо канали. Для виділеного каналу зв'язку, тобто окремого фізичного каналу зв'язку від обладнання оператора (провайдера) телекомунікаційних послуг до кінцевого обладнання клієнта, наприклад окремого електричного або оптоволоконного кабелю нижня гранична частота не обмежена і може дорівнювати нулю. Верхня гранична частота для електричного кабелю обмежена його розподіленими електричними параметрами, а для оптоволоконного – дисперсією світла, яке обумовлено його немонохроматичністю. Тобто, обмеження ширини смуги частот таких каналів має суто фізичну природу. Натомість для радіо каналів використовується, в тому числі, частотне розділення користувачів при якому операторам телекомунікаційних послуг державним регулятором надається певна смуга частот. В Україні таким регулятором виступає національна комісія, що здійснює державне регулювання у сферах електронних комунікацій, радіочастотного спектра та надання послуг поштового зв'язку. Таким чином, обмеження нижньої та верхньої граничних частот і, як наслідок, ширини смуги частот радіо каналів носить правовий характер. Серед фізичних факторів, які зменшують пропуску спроможність таких каналів, слід перш за все відзначити їх піддатність електромагнітним перешкодам, що створюються потужним промисловим електроустаткуванням, електротранспортом тощо.

1.15. Вимоги до пропускної спроможності каналів передачі мультимедійного контенту

Проведемо оцінку пропускної спроможності та ширини смуги частот каналу, які необхідні для передачі відеосигналу з параметрами: розміри растру

по горизонталі та вертикалі $x \cdot y = 800 \cdot 625$, глибина кольору (кількість біт якими колір пікселя) $m = 8$, частота кадрової розгортки $f_k = 25$ Гц. Швидкість передачі інформації при цьому становить

$$C = m \cdot x \cdot y \cdot f_k = 8 \cdot 8 \cdot 10^2 \cdot 6,25 \cdot 10^2 \cdot 2,5 \cdot 10 = 10^8 \text{ біт/с} = 100 \text{ Мбіт/с}. \quad (1.112)$$

Вважаючи, що коефіцієнт завантаження каналу за інформацією $K_i = \frac{C}{C_{\Pi}^3} = 1$, пропускна спроможність каналу чисельно дорівнює швидкості передачі інформації $C_{\Pi}^3 = C$. З іншого боку, згідно (1.105)

$$C_{\Pi}^3 = \Delta F \cdot \log \left(1 + \frac{P_C}{P_3} \right) \Big|_{P_3 \ll P_C} \approx \Delta F \cdot \log \left(\frac{P_C}{P_3} \right). \quad (1.113)$$

Припускаючи, що $\frac{P_C}{P_3} = 10^3$, а $\log \left(\frac{P_C}{P_3} \right) \approx 10$, для необхідної ширини смуги частот каналу маємо

$$\Delta F \approx \frac{C_{\Pi}^3}{\log \left(\frac{P_C}{P_3} \right)} = \frac{m \cdot x \cdot y \cdot f_k}{\log \left(\frac{P_C}{P_3} \right)} \approx 10^7 \text{ Гц} = 10 \text{ МГц}. \quad (1.114)$$

Це досить точна оцінка, враховуючи що реальна ширини смуги частот телевізійного каналу становить 8 МГц.

Тепер проведемо оцінку пропускної спроможності та ширини смуги частот каналу для передачі аудіо сигналу. При цьому розглянемо параметри сигналів найгіршої / найкращої якості які використовуються на практиці, а саме: кількість каналів $k = 1/2$ (моно / стерео), розрядність оцифрування $m = 8/16$, частота дискретизації $f_d = 8/44,1$ кГц. Перший сигнал придатний для передачі лише розмовного контенту, а другий – для якісної стереофонічної музики. Швидкість передачі інформації при цьому становитиме

$$C = k \cdot m \cdot f_d. \quad (1.115)$$

Подальші розрахунки дають значення пропускної спроможності та ширину смуги частот каналу відповідно 0,064 / 1,41 Мбіт/с та 6,4 / 142 кГц.

1.16. Особливості радіоканалів різних частотних діапазонів

При розгляді особливостей радіоканалів різних частотних діапазонів

насамперед слід відзначити дві важливі закономірності, що проявляються при зростанні частоти, на якій працює система радіо мовлення або радіозв'язку.

По перше, з'являється можливість надання каналу з більш широкою смугою частот і відповідно більшою пропускну здатністю, що забезпечує більші швидкості передачі даних. Таке явище можна пояснити наступним чином. Вирішальний вплив на апаратні особливості високочастотної частини телекомунікаційної системи має довжина робочої електромагнітної хвилі. Зокрема вона визначає елементну базу пасивних та активних складових, використовуваних схемотехнічні рішення, способи обробки сигналу, наприклад вид модуляції. З довжиною робочої електромагнітної хвилі напряду пов'язаний розмір передавальних антенних систем. Так, наприклад, найпростішою антеною є вертикальний відрізок провідника довжиною чверть довжини хвилі (чвертьхвильовий штир). Також довжина хвилі суттєво впливає на особливості розповсюдження електромагнітного випромінювання. Припустимо, що певна телекомунікаційна система дозволяє працювати з електромагнітними хвилями довжина яких змінюється в межах $\pm 5\%$ від певної довжини хвилі λ , тобто в смузі довжин хвиль шириною $\Delta\lambda = 0,1\lambda$. Диференціюючи відоме співвідношення між частотою та довжиною електромагнітної хвилі, для ширини смуги частот, яка відповідає цій ширині смуги довжин хвиль, можна отримати

$$|\Delta F| = \frac{\Delta\lambda \cdot c}{\lambda^2} = \frac{0,1c}{\lambda}, \quad (1.116)$$

де $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – швидкість світла в вакуумі. Тоді ширина смуги частот у довгохвильовому діапазоні при довжині хвилі 1 км становитиме 30 кГц, а у ультракороткохвильовому при довжині хвилі 1 м – 30 МГц.

По друге, зменшуються дифракційні властивості електромагнітних хвиль і за характером розповсюдження вони все більше нагадують світло.

В табл. 1.1 наведені основні характеристики частотних радіодіапазонів, в яких може здійснюватися телерадіомовлення або радіозв'язок.

Таблиця 1.1

Назва діапазону	Сфера використання (стандарт зв'язку)	Довжина хвиль, м	Частота хвиль, МГц
Довгохвильовий	Ефірне радіомовлення	2000 – 800	0,15 – 0,38
Середньохвильовий		650 – 200	0,46 – 1,5
Короткохвильовий	Радіоспорт	75 – 10	4 – 30
Ультракороткохвильовий, метровий	Ефірне телерадіомовлення	6,2 – 1,3	48,5 – 230
Ультракороткохвильовий, дециметровий	Мобільний зв'язок 4G (LTE-450)	0,67 – 0,64	450 – 470

	Ефірне телемовлення	0,64 – 0,5	470 – 600
	Ефірне телемовлення, мобільний зв'язок 5G	0,5 – 0,38	600 – 790
	Мобільний зв'язок 4G (LTE-800), 5G	0,38 – 0,35	790 – 870
	Мобільний зв'язок 2G (GSM-900), 3G (UMTS-900)	0,34 – 0,31	880 – 960
	Мобільний зв'язок 2G (GSM-1800), 4G (LTE-1800)	0,175 – 0,16	1710 – 1880
	Мобільний зв'язок 3G (IMT-2000/UMTS-FDD)	0,155 – 0,14	1920 – 2170
	Мобільний зв'язок 4G (LTE-2600)	0,12 – 0,11	2500 – 2700
Ультракоткороткохвильовий, сантиметровий	Мобільний зв'язок 5G	0,09 – 0,06	3300 – 5000
	Супутникове телемовлення	0,025 – 0,017	12000 – 18000
Ультракоткороткохвильовий, міліметровий	Мобільний зв'язок 5G	0,012 – 0,0075	26000 – 40000

Згідно проведених вище оцінок, довго та середньохвильовий діапазони мають смуги частот, які недостатні для передачі відеосигналу і навіть не дозволяють виділити багато окремих каналів для передачі якісних аудіо сигналів. Перевагою цих діапазонів є можливість стійкої передачі сигналів на великі відстані (сотні та тисячі кілометрів) без системи ретрансляторів за умови наявності потужного передавача з якісною антенною системою, розміри якої зіставні з довжиною хвилі. Оскільки наразі в ультракоткороткохвильових діапазонах створені щільні мережі як наземних так і супутникових ретрансляторів, вказана перевага втратила своє значення і, як наслідок, довго та середньохвильовий діапазони практично не використовуються.

В теперішній час найбільш застосовуваними є ультракоткороткохвильові діапазони, при чому їх низькочастотна частина використовується для ефірного телерадіомовлення, а високочастотна – для мобільного зв'язку та супутникового телемовлення. Перевагами цих діапазонів є великі пропускні спроможності каналів і невеликі розміри антенних систем. Як було відзначено вище, при зростанні робочої частоти зростають припустима ширина смуги частот каналу, його пропускна спроможність та швидкість передачі даних. При цьому

одночасно зменшується радіус дії базових станцій, що потребує ущільнення мережі ретрансляторів. Так максимальна ширина окремої смуги частот каналу для стандартів 4G LTE (Long-Term Evolution) – 900/1800/2600 відповідно складає 7,5/20/30 МГц, що забезпечує вхідну швидкість передачі даних 5,5/150/225 Мбіт/с, а вихідну 18/50/75 Мбіт/с. При цьому радіус дії базових станцій складає 26/14/3 км.

Варто відзначити кілька цікавих технологій, які використовуються для оптимізації трафіку в сучасних системах мобільного зв'язку. Зокрема це технологія FDD (Frequency Division Duplex), яка передбачає частотне розділення смуг вхідного (downlink) та вихідного (uplink) інформаційних трафіків. Оскільки на теперішній час отримали широке розповсюдження хмарні сховища багаторазово використовуваних даних, вхідний інформаційний трафік користувачів превалює над вихідним і тому для нього виділяється більш високочастотна смуга з більшою пропускнуою спроможністю. Другою технологією є агрегація (складання) в межах одного каналу полос різних частотних діапазонів. Зокрема, в групі стандартів LTE-Advanced передбачається можливість агрегації до 7-ми полос.

Що стосується короткохвильового діапазону, то його особливістю є найбільш інтенсивне відбиття радіохвиль від іонізованих верхніх шарів атмосфери. Така особливість розповсюдження радіохвиль сприяє можливості для встановлення зв'язку на великих відстанях без системи ретрансляторів при невеликій потужності передавача і компактних розмірах антенної системи. Однак при цьому можливість зв'язку визначається ступенем іонізації шарів атмосфери, від яких відбиваються радіохвилі, і залежить від таких чинників, як сонячна активність, наявність та інтенсивність метеоритних потоків, а тому не є стійкою. Зазначені особливості короткохвильового діапазону створили умови для виникнення на його теренах радіоспорту.

1.17. Об'єми сигналів і каналів, їхнє узгодження

Характеристики джерела повідомлень і каналу зв'язку, якими є: часи дії T , смуги частот ΔF (що залежать від швидкості формування сигналів джерелом і передачі їх по каналу відповідно), а також логарифмічні функції відношення потужностей сигналу й перешкоди $\log\left(1 + \frac{P_c}{P_3}\right)$, можуть бути

різними. Така невідповідність може призводити до втрат інформації, переданої від джерела в канал. Вихід із цього протиріччя може бути здійснений на основі подання про об'єми сигналу й каналу. Вираз для кількості інформації у формі (1.104), що є добутком трьох співмножників, може розглядатися як аналог геометричного об'єму паралелепіпеда з розмірами основи T , ΔF і висотою

$$h = \log\left(1 + \frac{P_c}{P_3}\right) \text{ (рис. 1.15, а).}$$

У цьому поданні передача інформації без втрат здійснена за умови, що об'єм каналу V_K не менше об'єму сигналу V_C , тобто

$$V_K \geq V_C, \text{ біт/с.} \quad (1.117)$$

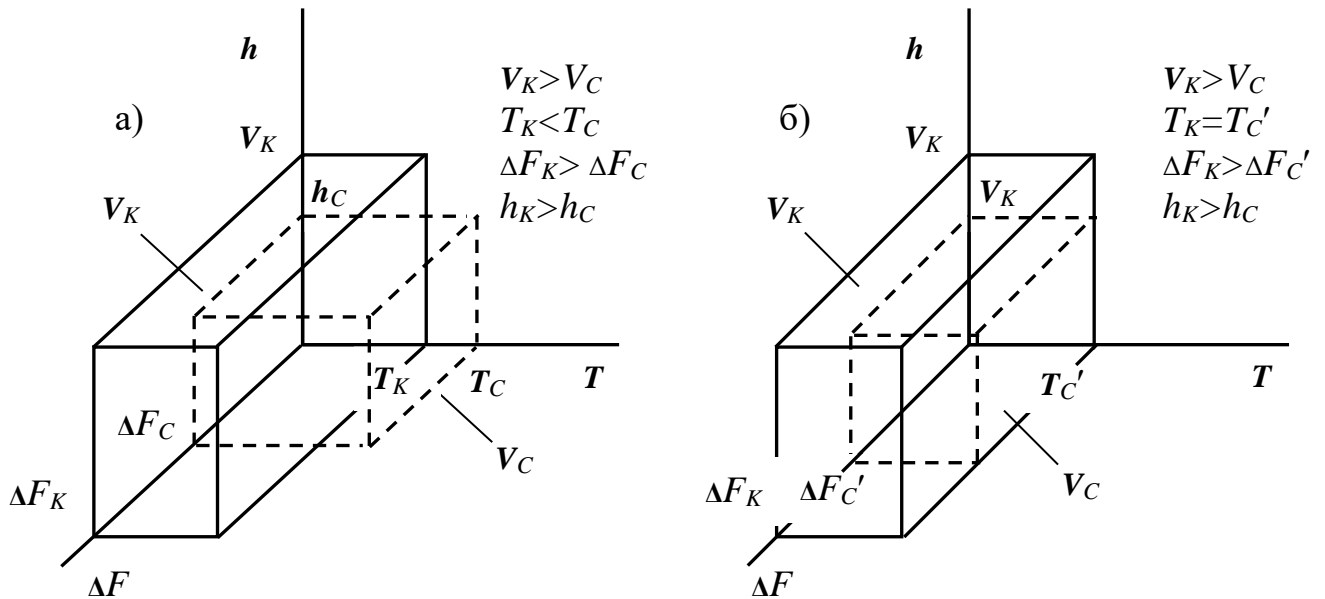


Рис. 1.15

Тут

$$\begin{cases} V_C = T_C \cdot \Delta F_C \cdot h_C \\ V_K = T_K \cdot \Delta F_K \cdot h_K \end{cases}, \quad (1.118)$$

а індекси C або K всіх співмножників означають, що вони характеризують сигнал або канал відповідно. У системах передачі технологічної інформації (СПІ) – системах телемеханіки $\frac{P_C}{P_3} \gg 1$ і, отже,

$$h_C \approx \log \left(\frac{P_C}{P_3} \right). \quad (1.119)$$

Аналогічно для каналу можна записати

$$h_K \approx \log \left(\frac{P_K}{P_3} \right), \quad (1.120)$$

де P_K – максимальна потужність сигналу в каналі, забезпечувана технічними характеристиками приймально-передавальної апаратури. При цьому

передбачається, що в номінальному режимі роботи СПП $P_C < P_K$, тобто апаратура допускає, при необхідності, деяке збільшення потужності сигналу відносно номінальної.

Нерівність (1.117) зветься загальною умовою узгодження сигналу й каналу і є необхідною для здійснення узгодження.

Відповідними достатніми умовами є нерівності системи

$$\begin{cases} T_K \geq T_C \\ \Delta F_K \geq \Delta F_C, \\ h_K \geq h_C \end{cases} \quad (1.121)$$

які зветься частковими умовами узгодження сигналу й каналу.

Якщо виконується загальна умова узгодження сигналу й каналу, але не виконується одна або дві із часткових, то використовується трансформація параметрів сигналу на основі інваріантів перетворень

$$\begin{cases} T_C \cdot \Delta F_C = const \\ T_C \cdot h_C = const \\ \Delta F_C \cdot h_C = const \end{cases} \quad (1.122)$$

Необхідне узгодження може здійснюватися й трансформаціями параметрів каналу. Однак це неможливо в СПП, де каналоутворююча апаратура обслуговує множину пар «джерело – приймач» повідомлень із різнорідними індивідуальними характеристиками.

Так, згідно з рис. (1.15, а) $V_K > V_C$, але час формування повідомлення T_C тут у півтора рази більший за час T_K надання каналу для його передачі, тобто не виконується перша часткова умова узгодження. Застосовуючи перший інваріант перетворення у вигляді $T_C \cdot \Delta F_C = T'_C \cdot \Delta F'_C$ й вважаючи $T'_C = T_K$, можна одержати

$$\Delta F'_C = \Delta F_C \cdot \frac{T_C}{T_K}. \quad (1.123)$$

Тепер об'єм сигналу за усіма трьома вимірами уписується в об'єм каналу (рис. 1.15, б).

Практично таке узгодження використовується, наприклад, під час передачі телефонних сигналів багатьох абонентів по спільній лінії зв'язку – високочастотному електричному або оптоволоконному кабелю. Тут можливе перенесення спектра сигналу у необхідну смугу частот каналу, як це наведено на рис. 1.16. Перенесення здійснюється внаслідок процесу модуляції високочастотних коливань несучої частоти сигналом.

Негативною стороною розглянутого узгодження є затримки в доставці повідомлень одержувачеві, які виникають через необхідність попереднього запису їх у пам'ять передавача в реальному часі, передачі в канал у прискореному режимі, а також зворотному перетворенні сигналу в приймачі.

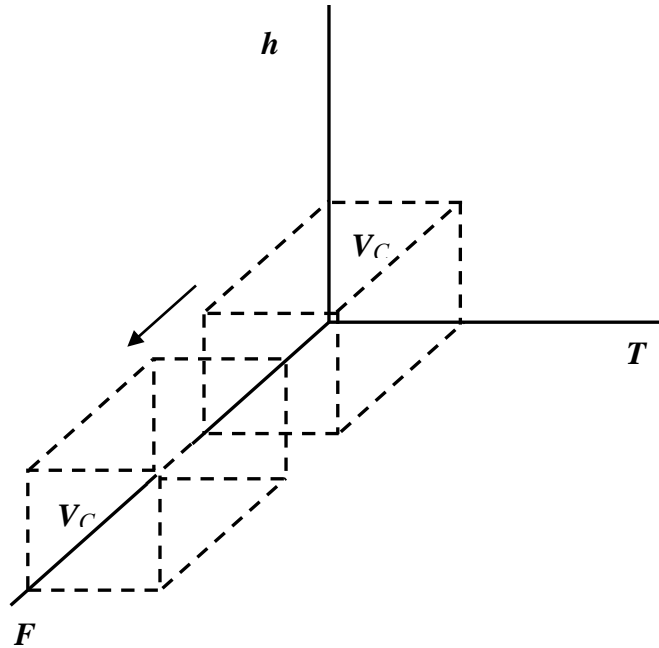


Рис. 1.16

З такими самими затримками пов'язана передача зображень у малокадровому телебаченні. Тут досить великий об'єм відеоінформації, одержуваної за короткий час експонування – запису в пам'ять (рис. 1.17), може передаватися по низькочастотній лінії зв'язку, але це потребує виконання нерівності $T_K \gg T_C$.

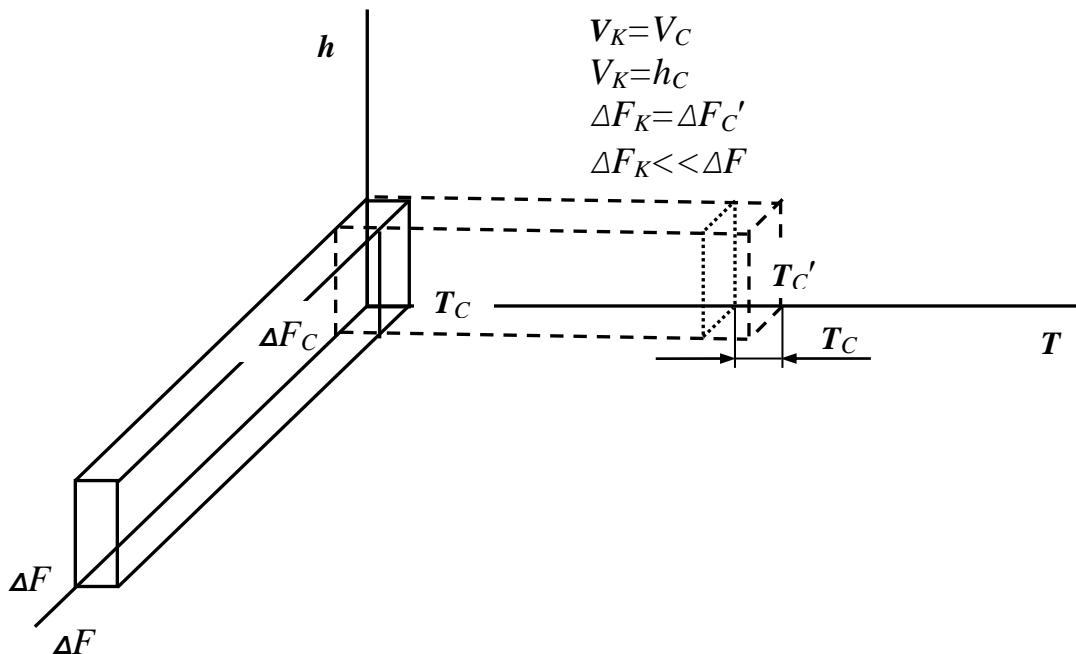


Рис. 1.17

Очевидно, що передача чергового кадру зображення можлива тільки після звільнення каналу, тобто з інтервалом T'_C , якщо до моменту закінчення передачі даного кадру в пам'яті джерела вже записаний наступний кадр.

1.18. Надлишковість повідомлень

Характеристика, що розглядається, є наслідком нерівномірності й взаємозалежності появи як елементів, так і самих повідомлень.

Поняття інформаційної надлишковості проявляється як у технічних системах, так і в інших галузях, наприклад структурах мов людського спілкування.

Наприклад, англійський алфавіт містить $m = 26$ літер. Якби в словах вони зустрічалися з однаковою імовірністю та були статистично незалежні, то ентропія джерела, у якому повідомленнями виступали літери такого алфавіту, була б максимальною й становила

$$H_{\max} = \log 26 \approx 4,70, \text{ біт/літеру.}$$

Однак літери в словах з'являються нерівномірно й взаємозалежно одна від одної. Прикладом нерівномірності появи літер є більша поширеність голосних ніж приголосних, а взаємозалежності – різна імовірність появи сполучень з двох літер (біграм) при різному порядку слідування літер. Розрахунок ентропії розглянутого джерела, зроблений за допомогою репрезентабельної виборки слів з 8-ми літер дає значення 2,35 біт/літеру.

При урахуванні статистики проходження слів у технічних текстах ентропія знижується до величини 2 біт/літеру.

Надлишковість повідомлення визначається як

$$D = 1 - \frac{H}{H_{\max}}, \quad (1.124)$$

де H – фактичне значення ентропії повідомлення, $H_{\max} = \log m$ – максимально можливе значення ентропії джерела символів алфавіту.

Якщо повідомлення джерела виникають нерівномірно й взаємозалежно при порядку джерела $r = 1$, то згідно (1.66)

$$H = -\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m p(x_i, x_j) \cdot \log p(x_j / x_i).$$

Відсутність взаємозалежності приводить до збільшення ентропії до значення (1.11), котре ми позначимо як H_0 .

Співвідношення (1.124) може бути перетворене до вигляду

$$D = 1 - \frac{H}{H_0} \cdot \frac{H_0}{H_{\max}} = 1 - (1 - D_S) \cdot (1 - D_P), \quad (1.125)$$

де $D_S = 1 - \frac{H}{H_0}$, $D_P = 1 - \frac{H_0}{H_{\max}}$ – носять назви статистичної й імовірнісної надлишковостей відповідно. При невеликих значеннях D_S , D_P вираз (1.110) може бути записаний як $D \approx D_S + D_P$.

Величина

$$\mu = \frac{H}{H_{\max}} \quad (1.126)$$

зветься коефіцієнтом стиснення повідомлення.

Надлишковість у інформаційних об'єктах відіграє двояку роль. Первинна надлишковість джерел – негативну, тому що знижує пропускну спроможність каналів зв'язку й збільшує необхідні об'єми пам'яті обчислювальних пристроїв. Таку надлишковість зазвичай, якщо є можливість, прагнуть знизити шляхом оптимального кодування повідомлень або стиснення даних. Однак спеціально організована надлишковість у кодах, які виявляють й виправляють помилки, дозволяє досягти необхідної вірогідності передачі повідомлень, що особливо важливо для систем телемеханіки.

Контрольні питання і завдання

1. Дайте визначення поняттю “інформація”.
2. Поясніть переваги й недоліки статистичної міри інформації.
3. Назвіть одиниці виміру інформації.
4. Наведіть приклади джерел дискретних і неперервних повідомлень.
5. Наведіть співвідношення для визначення кількості інформації, що несе дискретне повідомлення із заданою імовірністю, поясніть у яких межах може змінюватися ця величина.
6. Поясніть, з яких міркувань обґрунтовується логарифмічна міра кількості інформації.
7. Повідомлення відображує результат витягування карти з преферансної колоди, що містить $n = 32$ карти. Обчисліть кількість інформації, що міститься в повідомленнях, які полягають у тому, що карта має: певний колір, певну масть, певне значення.
8. В умовах попереднього завдання визначте мінімальну, максимальну та середню кількість інформації, яку може нести повідомлення «так» чи «ні» у відповідь на запитання, чи має карта певне значення.
9. В умовах попереднього завдання визначте мінімальну кількість запитань, на які даються відповіді «так» чи «ні», що дозволяє гарантовано

встановити значення карти. Обґрунтуйте, яким чином при цьому повинні ставитися запитання.

10. В урні містяться n білих та m чорних кульок. Випадковим чином послідовно виймаються дві кульки. Запишіть вирази для імовірності події, яка полягає у тому, що одна кулька біла, а інша – чорна та для кількості інформації, яку несе повідомлення про цю подію. Розгляньте випадки для схем виймання кульок з поверненням та без повернення.

11. По цілі здійснюється $k=4$ незалежних пострілів. Імовірність влучення у ціль при кожному пострілі p становить $0,5$. Знайдіть кількість інформації, яку несе повідомлення про стан цілі після обстрілу.

12. Імовірність того, що випадково обраний мешканець міста є студентом, складає $P(A)$, імовірність того, що випадково обраний мешканець є юнаком – $P(B)$. Імовірність того, що мешканець – юнак при умові, що він студент – $P(B/A)$. Знайдіть кількість інформації, яку несе повідомлення, що випадково обраний юнак є студентом.

13. Поясніть зв'язок між повною, частковою ентропією повідомлення та середньою питомою ентропією джерела повідомлень. Назвіть одиниці виміру цих величин та межі у яких вони можуть змінюватися.

14. Сформулюйте властивості часткової ентропії.

15. Сформулюйте властивості середньої питомої ентропії джерела дискретних повідомлень.

16. Назвіть умову максимуму ентропії джерела дискретних повідомлень.

17. Джерело дискретних повідомлень генерує незалежні дискретні повідомлення з імовірностями $\{p_i\}_{i=1,\dots,5} = \{0,5, 0,25, 0,125, 0,0625, 0,0625\}$.

Знайдіть ентропію джерела.

18. Доведіть, що ентропія геометричного імовірнісного розподілу

$$p_i = p(x_i = l) = \begin{cases} P(1-P)^i & \text{при } x_i \geq 0 \\ 0 & \text{при } x_i < 0 \end{cases} \quad \text{з параметром } P \text{ обчислюється за}$$

формулою: $-\frac{P \cdot \log P - (1-P) \cdot \log(1-P)}{P}$. Під час доведення скористуйтеся тим,

$$\text{що } \sum_{i=0}^{\infty} (1-P)^i = \frac{1}{1-(1-P)} = \frac{1}{P}, \text{ а } \sum_{i=0}^{\infty} i(1-P)^i = \frac{1-P}{P^2}.$$

19. Дайте тлумачення поняття двопозиційного повідомлення. Наведіть формулу для обчислення ентропії джерела незалежних двопозиційних повідомлень та поясніть її складові.

20. Знайдіть ентропію джерела повідомлень про результат кидання двох монет.

21. Дайте визначення порядку ергодичного джерела повідомлень.

22. Для джерела неперервних повідомлень, яке характеризується функцією щільності імовірності

$$w(x) = \begin{cases} \frac{C}{X_2 - X_1} & \text{при } X_1 \leq x < X_2 \\ \frac{1-C}{X_4 - X_3} & \text{при } X_3 \leq x \leq X_4 \\ 0 & \text{при } x < X_1, X_4 < x \end{cases}$$

доведіть, що $\int_{-\infty}^{\infty} w(x) dx = 1$ та знайдіть ентропію.

23. Виконайте попереднє завдання для функції щільності імовірності

$$w(x) = \begin{cases} \frac{2 \cdot x}{X_0^2} & \text{при } 0 \leq x < X_0 \\ 0 & \text{при } x < 0, X_0 < x \end{cases}$$

24. Імовірності $\{p(y_j, x_i)\}_{\substack{j=1, \dots, 3 \\ i=1, \dots, 4}}$ сумісної появи повідомлень об'єднання джерел $X - x_i$ та $Y - y_j$ визначається матрицею

$$\begin{vmatrix} 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,125 & 0,125 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,25 \end{vmatrix}$$

Знайдіть ентропію об'єднання джерел повідомлень $H(X, Y)$, безумовні імовірності появи повідомлень кожного з джерел та значення їхніх ентропій. Поясніть співвідношення між ними.

25. В умовах попереднього завдання побудуйте таблиці умовних імовірностей $\{p(y_j / x_i)\}_{\substack{j=1, \dots, 3 \\ i=1, \dots, 4}}$ та $\{p(x_i / y_j)\}_{\substack{i=1, \dots, 3 \\ j=1, \dots, 4}}$ та знайдіть значення умовних ентропій $H(Y/X)$, $H(X/Y)$. Поясніть співвідношення між ними.

26. Для джерела взаємозалежних двійкових повідомлень задані значення однієї безумовної $p(0)$ і однієї умовної $p(0/0)$ імовірностей появи повідомлень. Знайдіть решту умовних імовірностей та умовну ентропію джерела, якщо попереднім повідомленням є 0.

27. При відсутності перешкод швидкість розмови по телефону V становить 20 слів/хв, середня довжина слова $k=6$, а середня питома ентропія $H=2$ біт/літеру. Знайдіть швидкість передачі інформації.

28. Джерело інформації виробляє $m=16$ рівноймовірних і незалежних повідомлень, кожне з яких кодується $k=4$ двійковими символами. Тривалість двійкового символу τ становить 1 мс. Знайдіть швидкість передачі двійкових сигналів та інформації при відсутності перешкод.

29. Джерело інформації виробляє $m=4$ незалежних повідомлення, які виникають з імовірностями $\{p_i\}_{i=1,\dots,4} = \{0,5, 0,25, 0,125, 0,125\}$ і мають тривалості $\{\tau_i\}_{i=1,\dots,4} = \{0,5, 1, 1, 2\}$ с. Знайдіть швидкість генерації інформації джерелом.

30. Для передачі по каналу зв'язку неперервного випадкового сигналу він дискретизується у часі з інтервалом $\Delta t = 10$ мс, що забезпечує незалежність відліків, а кожний відлік квантується з перетворенням його в дискретний каналний сигнал з кількістю рівнів квантування $m=64$. Знайдіть пропускну спроможність каналу.

31. Поясніть поняття симетричності двійкового каналу.

32. Доведіть, що при малих значеннях імовірності помилкового прийому сигналів p пропускну спроможність двійкового симетричного каналу без пам'яті при наявності перешкод може бути обрахована за співвідношенням:

$$C_{II}^3 = U \cdot \left[1 + p \left(\log p - \frac{1}{\ln 2} \right) \right].$$

Обчисліть її значення, якщо $U = 10^5$ Бод, $p = 2^{-7}$.

33. Обчисліть пропускну спроможність двійкового симетричного каналу без пам'яті при наявності перешкод, якщо $U = 10^5$ Бод, $p = 0,25$, $\log 3 \approx 1,6$.

34. Побудуйте сімейство залежностей пропускну спроможності двійкового симетричного каналу з перешкод C_{II}^3 від імовірності помилкового прийому сигналів p при варіації швидкості передачі сигналів U . Визначте імовірності, при яких досягаються мінімальне та максимальне значення пропускну спроможності.

35. Побудуйте сімейство залежностей пропускну спроможності двійкового симетричного каналу з перешкод C_{II}^3 від швидкості передачі сигналів U при варіації імовірності помилкового прийому сигналів p .

36. Дайте визначення каналної матриці. Поясніть, яким властивостям повинні задовольняти її елементи.

37. Канальна матриця має вигляд

$$\{p(y_j / x_i)\}_{\substack{i=1,\dots,4 \\ j=1,\dots,4}} = \begin{vmatrix} 2^{-1} & 2^{-2} & 2^{-3} & 2^{-3} \\ 2^{-3} & 2^{-1} & 2^{-2} & 2^{-3} \\ 2^{-3} & 2^{-3} & 2^{-1} & 2^{-2} \\ 2^{-3} & 2^{-3} & 2^{-2} & 2^{-1} \end{vmatrix}.$$

Знайдіть імовірності появи повідомлень на вході $\{p(x_i)\}_{i=1,\dots,3}$ та виході каналу $\{p(y_j)\}_{j=1,\dots,4}$ і середні втрати інформації при передачі повідомлення по каналу. Визначте швидкість передачі інформації, якщо тривалість повідомлення становить $\tau = 1$ мс.

38. Наведіть вираз для пропускної спроможності каналу з перешкодами C_{II}^3 , який отримано при використанні енергетичного підходу та сформулюйте використані при цьому припущення.

39. Назвіть чинники, які обмежують пропускну спроможність каналів зв'язку різної фізичної основи при відсутності перешкод.

40. Поясніть причини зростання пропускної спроможності радіоканалів зв'язку зі зростанням робочої частоти.

41. Наведіть переваги і недоліки радіоканалів зв'язку різних частотних діапазонів.

42. Побудуйте сімейство залежностей пропускної спроможності каналу з перешкодами C_{II}^3 від відношення потужностей сигналу та перешкод $\frac{P_C}{P_3}$ при варіації ширини смуги частот каналу ΔF .

43. По каналу зв'язку з шириною смуги частот $\Delta F = 10^3$ Гц, у якому діє широкопугмова перешкода – білий шум з питомою спектральною щільністю $p_0 = 2 \cdot 10^{-6}$ Вт/Гц, передається сигнал потужністю $P_C = 4$ Вт. Обчисліть пропускну спроможність каналу. Визначте верхню межу пропускної спроможності каналу з такими енергетичними характеристиками.

44. Наведіть загальну та часткові умови узгодження сигналу й каналу.

45. Наведіть практичні приклади узгодження сигналів та каналів.

46. Виконайте узгодження сигналу і каналу з параметрами $T_K = 1$ с $T_C = 5$ с, $\Delta F_K = 100$ кГц, $\Delta F_C = 10$ кГц, $h_K = h_C$. Поясніть, яким чином технічно може бути виконано це узгодження.

47. Для сигналу і каналу з параметрами $T_K = 0,1$ с $T_C = 1$ с, $\Delta F_K = 50$ кГц, $\Delta F_C = 10$ кГц, $\frac{P_C}{P_{II}} = 10^3$ визначте мінімальне значення відношення $\frac{P_K}{P_{II}}$ при якому виконується необхідна умова узгодження.

48. Дайте визначення величинам статистичної та імовірнісної надлишковостей повідомлень, поясніть, які імовірнісні характеристики джерела повідомлень впливають на їх значення.

49. Матриці умовних імовірностей повідомлень двійкового джерела $p(x_j / x_i)$ мають вигляд

$$\begin{vmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0,25 & 0,75 \\ 0,75 & 0,25 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0,25 & 0,75 \\ 0,25 & 0,75 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,9 & 0,1 \end{vmatrix}.$$

Знайдіть величини статистичної та імовірнісної надлишковостей повідомлень

50. Поясніть причини і наслідки наявності статистичної й імовірнісної надлишковостей в українській мові.

2. ОСНОВИ ТЕОРІЇ Й ПРАКТИКИ КОДУВАННЯ ПОВІДОМЛЕНЬ У СИСТЕМАХ ПЕРЕДАЧІ ТЕХНОЛОГІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

Навчальні цілі: формування знань щодо основ теорії кодування повідомлень в системах автоматики і системах передачі технологічної інформації та набуття навичок синтезу оптимальних, елементарних перешкодостійких, лінійних, циклічних та канальних кодів.

2.1. Загальні положення. Класифікація кодів

Кодування в галузі систем передачі інформації (СПІ) – це відображення множини дискретних повідомлень на множину елементів (кодових символів), які у свою чергу відображаються елементарними сигналами – носіями інформації.

Кількість елементів використовуваних для кодування m носить назву основи коду або обсягу алфавіту і становить принаймні $m = 2$ для двійкових кодів. Оскільки на практиці кількість повідомлень, які кодуються, завжди перевищує обсяг алфавіту, а закодовані повідомлення врешті решт повинні бути однозначно декодовані, вони представляються у вигляді впорядкованих послідовностей кодових символів, що носять назву кодів, кодових слів або кодових комбінацій.

Таблиці відповідності всіляких можливих повідомлень, що кодуються, та відповідних їм кодових слів носять назви кодових таблиць.

Кодом також називають правила, за якими утворюються кодові комбінації.

Кодування може виражатися також у переході від одного коду до іншого, побудованого за своїми власними правилами (наприклад, від нормального двійкового до двійково-десятькового).

Кодування повідомлень може переслідувати цілі:

1. Одержання необхідної множини повідомлень при обмеженій або, кажучи іншими словами, власно представлення повідомлень за допомогою заданого алфавіту.

2. Досягнення максимальної ефективності СПІ шляхом зниження надлишковості переданих повідомлень.

3. Забезпечення необхідної достовірності передачі інформації в каналах з перешкодами шляхом виявлення та виправлення помилок, які виникають у кодових комбінаціях під впливом перешкод.

Перші коди мають назву звичайних, другі – оптимальних, треті – перешкодостійких.

Зазначимо, що слід не плутати поняття кодування і зашифрування повідомлень. Ціллю останнього є приховування сенсу інформації, що міститься у повідомленнях.

Коди в різних галузях застосування можуть класифікуватися за різними ознаками. У СПІ їми можуть бути:

1. Логіко-математичні основи побудови коду – коди алгебраїчні, комбінаторні й ін.

2. Стійкість до перекручувань (трансформацій) елементів коду під час передачі або при зберіганні повідомлень – звичайні (неперешкодостійкі) та коди які виявляють, а також виправляють помилки.

3. Залежність результатів кодування поточного повідомлення від попередніх – блокові, в яких повідомлення кодуються незалежно, й неперервні (ланцюгові) коди, де така залежність має місце.

4. Ознака довжин кодових комбінацій – рівномірні, у яких ця величина незмінна, і нерівномірні, у яких використовуються кодові комбінації змінної довжини.

5. Основа коду – число використовуваних елементів алфавіту – двійкові та багатопозиційні.

6. Місце здійснення операції кодування в структурі СПП – коди джерел повідомлень, коди видів повідомлень, каналні коди й ін.

7. Спосіб передачі елементів коду сигналами – послідовні (часові) і паралельні (частотні) або передані по багатопроводовій лінії (шині).

На рис. 2.1 представлена діаграма загальної класифікації кодів на нижньому рівні якої наведені можливі варіанти класифікаційних ознак для відповідної гілки діаграми. На цій діаграмі коди класифікуються за структурними характеристиками, які визначають особливості структури кодових комбінацій та характеристиками сигналів, котрі є носіями кодових символів. В табл. 2.1 поєднані три найпростіші кодові таблиці, яка ілюструє зв'язок різних цілей кодування зі структурними характеристиками кодів, які використовуються для їх досягнення.

За основою коду виділяються двійкові та багатопозиційні коди. Таке відокремлення двійкових кодів пояснюється їх домінуючим розповсюдженням, яке в свою чергу обумовлене цифровим характером апаратних реалізацій сучасних інформаційних систем. Окрім того, двійкові коди порівняно з багатопозиційними мають певні особливості. Так, наприклад, для двійкових кодів завдання виправлення помилки і знаходження розряду кодової комбінації в якому вона має місце фактично є еквівалентними. У цьому випадку виправлення помилки зводиться до інвертування значення відповідного розряду. Зрозуміло, що для багатопозиційних кодів такий підхід є неможливим.

Коди I та III табл. 2.1 є рівномірними, а код II нерівномірним, оскільки у ньому різним повідомленням відповідають кодові комбінації різної довжини. Нерівномірність притаманна для оптимальних кодів, в яких кодування більш імовірних повідомлень кодовими словами меншої довжини дозволяє отримати середню довжину кодової комбінації меншу ніж при використанні рівномірних кодів.

Код I табл. 2.1 повністю використовує можливі кодові комбінації, адже не існує двохрозрядних кодових слів окрім зазначених у таблиці. Код III неповністю використовує можливі кодові комбінації, що є першою проявою надлишковості коду. При неповному використанні кодових комбінацій вони

поділяються на дозволені, які містяться у кодовій таблиці та заборонені. Згідно (1.124) надлишковість коду становить

$$D = 1 - \frac{H}{H_{\max}} = 1 - \frac{\log N_0}{\log N}, \quad (2.1)$$

де $N_0 = 4$, $N = 2^4$ – відповідно кількість дозволених та загальна можлива кількість кодових комбінацій. Тобто надлишковість коду становить 0,5. Надлишковість і неповне використання кодових комбінацій притаманні для перешкодостійких кодів, для котрих виникнення забороненої кодової комбінації є ознакою того, що воно містить принаймні одну помилку.

На рис. 2.2 представлена діаграма класифікації двійкових кодів, які поділяються на умовно ненадлишкові – оптимальні та звичайні і надлишкові – перешкодостійкі. На нижньому рівні діаграми наведені назви кодів, які є представниками відповідної гілки класифікації.

Особливістю перешкодостійких кодів є те, що їх розряди окрім функції кодування виконують функцію контролю правильності значень інших розрядів і виправлення наявних в них помилок, що є другим проявом надлишковості. Коди, в яких існує чіткий розділ між інформаційними і контрольними (перевірними) розрядами, зветься систематичними. При кодуванні повідомлень значення контрольних розрядів не можуть задаватися незалежно, вони обчислюються на основі значень інформаційних розрядів та співвідношень, які зветься контрольними, або перевірними. Для двійкового систематичного коду, з урахуванням того, що кількість дозволених кодових комбінацій визначається кількістю можливих станів інформаційних розрядів, а загальна можлива кількість кодових комбінацій – кількістю можливих станів всіх розрядів, вираз для надлишковості (2.1) може бути спрощений і записаний у вигляді

$$D = 1 - \frac{\log N_0}{\log N} = 1 - \frac{\log 2^k}{\log 2^n} = 1 - \frac{k}{n} = \frac{\mu}{n}, \quad (2.2)$$

де k та μ – кількість інформаційних та контрольних розрядів відповідно, $n = k + \mu$ – довжина кодового слова. Надлишковість коду може змінюватися у межах $0 \leq D < 1$. Слід зазначити, що умовно ненадлишкові оптимальні та звичайні коди можуть мати певні відмінні від нуля надлишковості, але для їх розрахунків слід використовувати формулу (1.103), а не (2.1), (2.2), які застосовуються суто для перешкодостійких кодів.

На закінчення необхідно визнати, що найбільш потужний і ефективний генетичний код створений не людиною, а еволюцією живої матерії. Він полягає в поданні молекул спадкоємної речовини – ДНК за допомогою нуклеотидів і забезпечує збереження та видозміну життєвих форм на Землі.

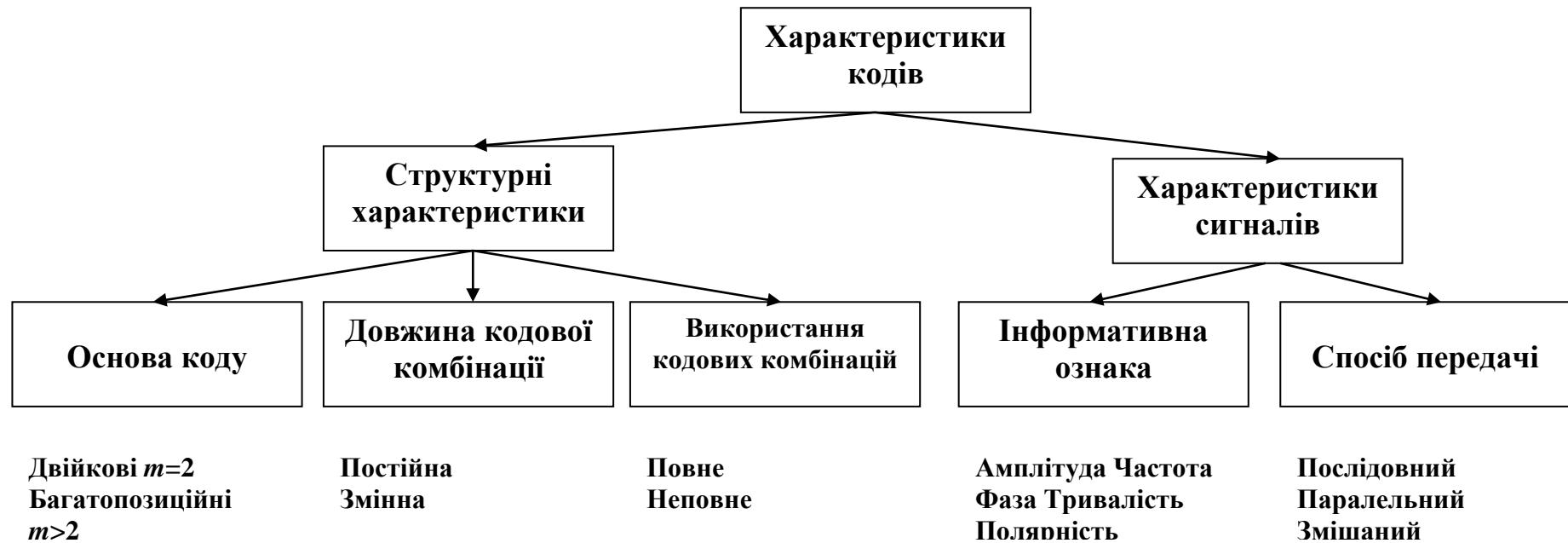


Рис. 2.1

Таблиця 2.1

Повідомлення	Нормальний двійковий код (звичайний), код I	Код Хаффмена (оптимальний), код II	Код з постійною вагою (перешкодостійкий), код III
a	00	0	1000
b	01	10	0100
c	10	110	0010
d	11	111	0001

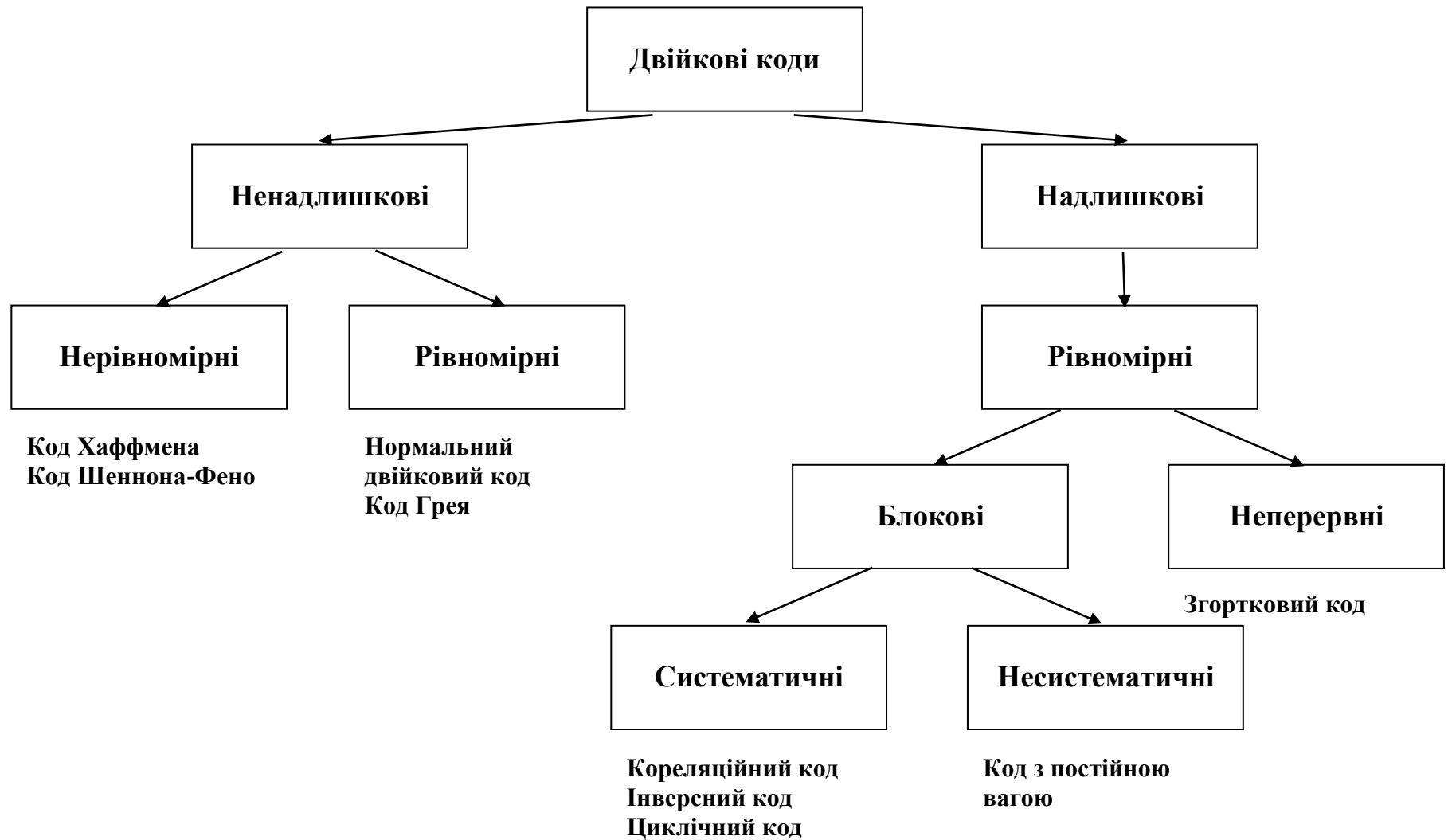


Рис. 2.2

2.2. Постановка задачі кодування в каналах без перешкод. Нерівність Крафта – Макміллана

З метою досягнення максимальної ефективності кодування повинні бути вирішені задачі:

1. Визначення довжин кодових комбінацій відповідно до імовірностей появи повідомлень. При цьому більше імовірним повідомленням повинні відповідати коротші кодові комбінації. У галузі зв'язку розв'язання цієї задачі знайшло практичну реалізацію в коді Морзе, де літери, що часто зустрічаються в англійських текстах передаються короткими сигналами, і навпаки (наприклад, буква «e» → «.» (крапкою), «s» → «- - -» (трима тире)).

2. Розробка такої структури кодових комбінацій, щоб їх можна було передавати без розділових елементів. Це можливо, якщо короткі кодові комбінації не будуть початками довгих. Тільки при виконанні цієї умови нерівномірний код припускає однозначне декодування.

Пояснимо, як може бути сформований такий код, на наступному прикладі.

Нехай є три групи повідомлень – одне високоімовірне, декілька – із середньою імовірністю появи, а решта, більша частина повідомлень – малоімовірні. Встановимо також, що основа коду $m = 4$ (літери a, b, c, d).

Закодуємо високоімовірне повідомлення S_1 літерою «a». Тоді середньоімовірні повідомлення не повинні на першій позиції в кодових комбінаціях містити літеру «a». Припустимо, що такі кодові комбінації починаються з літери «b». Отже, кодові комбінації низькоімовірних повідомлень будуть починатися з літер «c» і «d».

Згідно цього одержимо коди повідомлень, що наведені в табл. 2.2.

Таблиця 2.2

$S_1 - a$	$S_2 - ba$	$S_3 - bb$	$S_4 - bc$	$S_5 - bd$
$S_6 - caa$	$S_7 - cab$	$S_8 - cac$	$S_9 - cad$	$S_{10} - cba$
$S_{11} - cbb$	$S_{12} - cbc$	$S_{13} - cbd$	$S_{14} - cca$	$S_{15} - ccb$
$S_{16} - ccc$	$S_{17} - ccd$	$S_{18} - cda$	$S_{19} - cdb$	$S_{20} - cdc$
$S_{21} - cdd$	$S_{22} - add$	$S_{37} - ddd$

Решта з 16-ти комбінацій коду, які починаються з літери «d», для повідомлень $S_{22} \dots S_{37}$ одержуємо аналогічно, як і для $S_6 \dots S_{21}$, використовуючи повторення й перестановки на других і третіх позиціях кодів.

У загальному випадку співвідношення між основою коду m і кількістю кодових комбінацій різної довжини для коду, у якого короткі кодові комбінації не є початками довгих, задовольняють нерівності Крафта – Макміллана.

Отже, при основі коду m число одноелементних кодових комбінацій $l_1 \leq m$. Якщо $l_1 < m$, з'являється можливість одержання двохелементних комбінацій, число яких $l_2 \leq (m - l_1)m = m^2 - ml_1$.

Аналогічно для кодових комбінацій довільної довжини можна записати

$$l_3 \leq [(m - l_1)m - l_2]m = m^3 - m^2l_1 - ml_2$$

·
·

$$l_z \leq m^z - m^{z-1}l_1 - m^{z-2}l_2 - \dots - m^2l_{z-2} - ml_{z-1}.$$

Ділення правої й лівої частини цього виразу на m^z й перегрупування його дає нерівність

$$m^{-1}l_1 + m^{-2}l_2 + \dots + m^{-z+1}l_{z-1} + m^{-z}l_z \leq 1. \quad (2.3)$$

Загальна кількість комбінацій такого коду дорівнює кількості повідомлень, що кодуються: $N = \sum_{s=1}^z l_s$, де z – максимальна довжина кодової комбінації. Вираз (2.3) може бути зображений у вигляді

$$\sum_{j=1}^z \sum_{k=1}^{l_j} m^{-j} \leq 1, \quad (2.4)$$

де кожному члену подвійної суми відповідає одне повідомлення.

В припущенні, що повідомленню з номером i відповідає кодова комбінація з довжиною n_i , розташування членів суми (2.4) в порядку нумерації повідомлень дає остаточну нерівність

$$\sum_{i=1}^N m^{-n_i} \leq 1. \quad (2.5)$$

Остання є необхідною умовою для коду, короткі кодові комбінації котрого не є початками довгих. Код комбінації якого задовольняють вказаній властивості зветься роздільним. Так, наприклад, для розглянутого вище коду з комбінаціями $S_1 \dots S_{21}$ згідно табл. 2.2, значення суми в (2.5) складає 0,75, а з комбінаціями $S_1 \dots S_{37}$ – 1. Нерівність Крафта – Макміллана не встановлює зв'язку між імовірностями появи повідомлень і довжинами кодових комбінацій, що їм відповідають. Рішення цієї задачі було знайдено К. Шенноном у вигляді доведення наступної теореми.

2.3. Основна теорема кодування в каналах без перешкод та її наслідок

Основна теорема кодування в каналах без перешкод має вигляд: середня довжина кодової комбінації n_c не може бути менше частки від ділення

середньої ентропії джерела повідомлень $H(x)$ на максимальну інформативність елемента коду, $\log m$

$$n_c \geq \frac{H(x)}{\log m}. \quad (2.6)$$

При цьому середня довжина n_c для заданого розподілу імовірностей появи повідомлень $p(x_i)$ і довжин їхніх кодів n_i визначається як

$$n_c = \sum_{i=1}^N n_i p(x_i). \quad (2.7)$$

Для доведення теореми використовується нерівність

$$\sum_{i=1}^N p(x_i) \log \frac{p(x_i)}{q(x_i)} \geq 0. \quad (2.8)$$

У даній нерівності $q(x_i)$ – це будь-який розподіл імовірностей із числом складових, що дорівнює N . Справедливість (2.8) доводиться на основі методу невизначених множників Лагранжа. При цьому розв'язується задача пошуку екстремуму цільової функції

$$W(q(x_i)) = \sum_{i=1}^N p(x_i) \log \frac{p(x_i)}{q(x_i)}, \quad (2.9)$$

при обмеженні $\sum_{i=1}^N q(x_i) - 1 = 0$, якому повинен задовольняти довільний розподіл імовірностей. Функція Лагранжа та її часткові похідні для цієї задачі мають вигляд

$$L(q(x_i), \lambda) = \sum_{i=1}^N p(x_i) \log \frac{p(x_i)}{q(x_i)} + \lambda \left(\sum_{i=1}^N q(x_i) - 1 \right);$$

$$\frac{\partial L(q(x_i), \lambda)}{\partial q(x_i)} = -\frac{p(x_i)}{q(x_i)} + \lambda. \quad (2.10)$$

Екстремум цільової функції досягається, коли всі часткові похідні функції Лагранжа дорівнюють нулю, що можливо тільки за умови $q(x_i) = p(x_i)$. При цьому $W(q(x_i)) = 0$. В тому, що екстремум є мінімумом, тобто цільова функція

(2.9) є невід'ємною і виконується нерівність (2.8), можна переконатися, узявши в якості імовірнісного розподілу $q(x_i)$ будь-який відмінний від $p(x_i)$, наприклад, рівномірний. При цьому $q(x_i) = \frac{1}{N}$ та з урахуванням (1.22) виконується нерівність

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N p(x_i) \log \frac{p(x_i)}{q(x_i)} &= \sum_{i=1}^N p(x_i) \log(N \cdot p(x_i)) = \\ &= \log N \cdot \sum_{i=1}^N p(x_i) - \sum_{i=1}^N p(x_i) \log(p(x_i)) = \log N - H(X) \geq 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Нерівність (2.8) можна записати у вигляді

$$\sum_{i=1}^N p(x_i) \log p(x_i) \geq \sum_{i=1}^N p(x_i) \log q(x_i). \quad (2.12)$$

Ліва частина цієї нерівності – це середня ентропія $H(X)$ зі зворотним знаком. Тому (2.12) записується у вигляді

$$H(X) \leq -\sum_{i=1}^N p(x_i) \log q(x_i). \quad (2.13)$$

Задамо розподіл $q(x_i)$ у вигляді

$$q(x_i) = \frac{m^{-n_i}}{\sum_{j=1}^N m^{-n_j}}. \quad (2.14)$$

Тут чисельник дробове число, а знаменник – це сума дробових чисел при $j=1\dots N$, яка згідно (2.5) дорівнює одиниці або менше її. Тоді права частина (2.11) набуває вигляду

$$-\sum_{i=1}^N p(x_i) \log \frac{m^{-n_i}}{\sum_{j=1}^N m^{-n_j}} = \sum_{i=1}^N n_i p(x_i) \log m + \sum_{i=1}^N p(x_i) \log \sum_{j=1}^N m^{-n_j}. \quad (2.15)$$

Перший доданок правої частини складає

$$\sum_{i=1}^N n_i p(x_i) \log m = \log m \sum_{i=1}^N n_i p(x_i) = n_c \log m.$$

У другому доданку співмножник згідно нерівності Крафта є недодатним

$$\log \sum_{j=1}^N m^{-n_j} \leq \log(1) = 0,$$

тобто цей доданок менше або дорівнює нулю. Отже, якщо їм зневажити, нерівність (2.11) лише підсилиться й остаточно можна записати

$$H(x) \leq n_c \log m,$$

що й відповідає твердженню теореми (2.4). Доведена теорема носить назву теореми Шеннона.

Її наслідком є часткові нерівності для визначення довжин кодів повідомлень вигляду

$$n_i \geq \frac{H(x_i)_\Pi}{\log m} = \frac{-\log p(x_i)}{\log m}. \quad (2.16)$$

Справедливість цих залежностей можна підтвердити шляхом їх підстановки у рівняння (2.7), внаслідок чого буде отримано нерівність (2.4).

Оскільки довжини n_i є цілочисельними, (2.16) слід записати у вигляді

$$n_i = E \left[\frac{-\log p(x_i)}{\log m} \right], \quad (2.17)$$

де E – функція округлення результату до найближчого більшого цілого.

Після розв'язання цієї задачі залишається невирішеним питання алгоритмів побудови кодових комбінацій нерівномірних кодів при заданій кількості повідомлень N й розподілі імовірностей їхньої появи $p(x_i)$. Відомі два теоретичних алгоритми й кілька прикладних для побудови таких кодів. Розглянемо реалізацію теоретичних алгоритмів.

2.4. Алгоритм Шеннона – Фено

Під час реалізації алгоритму спочатку повідомлення розташовуються згідно з порядком спадання їхніх імовірностей (табл. 2.3).

Далі алгоритм виконується покроково.

На першому кроці вся множина повідомлень розділяється на « m » груп I-го порядку з максимально близькими за можливостями сумарними імовірностями груп. За прикладом $m = 2$ і відповідно у першій групі буде повідомлення x_1 , в другій – x_2 , x_3 і x_4 . На першому кроці встановлюються значення кодових символів коду Шеннона – Фено (КШФ) – групі з більшою сумарною імовірністю – один символ, наприклад, «0», з меншою – «1».

Таблиця 2.3

Повідомлення x_i	Імовірність $p(x_i)$	Номер кроку ділення	Код Шеннона – Фено			Нормальний двійковий код	
			I	II	III		
x_1	1/2	I	0			0	0
x_2	1/4		II	1	0		0
x_3	1/8	III		1	1	0	1
x_4	1/8			1	1	1	1

Другий крок виконується одночасно вище й нижче риси ділення I-го порядку. При цьому ділення повинні задовольняти вимогам відповідних сумарних імовірностей, як і на першому кроці.

Наступні кроки алгоритму виконуються аналогічно до тих пір, поки в кожній групі не залишається по одному повідомленню.

За прикладом на першому кроці кодування повідомлення x_1 закінчується. На другому одержуємо групи повідомлень – x_2 з одного боку та x_3 , x_4 з іншого і аналогічно встановленому вище правилу призначаються наступні елементи КШФ.

Розглянутий варіант алгоритму є наближеним. Для реальних імовірностних розподілів і впорядкованих повідомлень сумарні імовірності груп під час чергового ділення можуть розрізнятися досить суттєво. Тому при кожному діленні бажано розглядати всі можливі варіанти ділення множини повідомлень на групи і вибрати з них спосіб з максимально близькими сумарними імовірностями груп. Однак, враховуючи, що кількість варіантів розбиття множини з N елементів на дві непорожні групи становить $2^{N-1} - 1$, виконання цієї вимоги при розрахунках вручну є трудомістким.

При розподілі імовірностей за від'ємними ступенями числа m (тут 2^{-1} , 2^{-2} і 2^{-3}) значення довжин КШФ виходять цілочисельними, без

округлення, а інформаційне навантаження на елемент кодової комбінації є максимальним.

$$H(x)_{\text{КШФ}} = -\sum_{i=1}^N \frac{1}{n_i} p(x_i) \log p(x_i) =$$

$$= -\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \log \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} \log \frac{1}{8} = 1 \text{ біт/ел.}$$

Отриманий за прикладом КШФ є оптимальним, тому що його надлишковість згідно (1.124) дорівнює нулю.

Порівняємо ефективність цього коду з нормальним двійковим (НДК), довжини кодових комбінацій якого незмінні. Довжина НДК становить

$$n = E[\log N] = \log 4 = 2$$

(про це свідчать і дані табл. 2.2), інформаційне навантаження на елемент кодової комбінації

$$H(x)_{\text{НДК}} = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^N p(x_i) \log p(x_i) = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \log \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \log \frac{1}{4} + \frac{2}{8} \log \frac{1}{8} \right] = \frac{7}{8} \text{ біт/ел,}$$

а його надлишковість

$$D = 1 - \frac{H(x)_{\text{НДК}}}{H(x)_{\text{макс}}} = 1 - \frac{\frac{7}{8}}{1} = \frac{1}{8}.$$

Таким чином, проведені розрахунки підтверджують ефективність нерівномірного нероздільного коду в порівнянні з рівномірним.

2.5. Алгоритм Хаффмана

Як і в алгоритмі КШФ, повідомлення розташовуються згідно з порядком спадання імовірностей їхньої появи. Алгоритм Хаффмана може бути виконаний у табличній або графічній формі. На практиці у ролі складової частини алгоритмів стиснення растрових графічних даних широко використовується алгоритм Хаффмана з фіксованою таблицею. Під час його реалізації повідомлення ранжуються за зменшенням імовірностей їх появи, а потім повідомленню з заданим рангом ставиться у відповідність кодова комбінація, що обумовлена таблицею.

При невеликому числі повідомлень наочним є графічний варіант побудування коду Хаффмана (КХ) у вигляді кодового дерева (графа). Тут імовірності повідомлень призначаються вихідними вершинами графа. На першому кроці « m » вершин з найменшими імовірностями з'єднуються дугами

з першою проміжною вершиною із сумарною імовірністю об'єднання. Так, згідно рис. 2.1 при $m = 2$ це імовірності $p(x_6)$ й $p(x_7)$ появи повідомлень x_6 і x_7 й сумарною імовірністю 0,06. Дуги графа позначаються елементами коду, для $m = 2$ дуга вершини з більшою імовірністю, наприклад, «0», з меншою – «1».

Другий крок об'єднання повторює дії першого із включенням у число вихідних першої проміжної вершини і виключенням вершин, що об'єднані на попередньому кроці. У результаті утворюється друга проміжна вершина, яка розглядається черговою, що приєднується до числа інших вихідних.

Наступні кроки алгоритму виконуються аналогічно до тих пір, поки всі вихідні імовірності не будуть об'єднані.

Остаточний код повідомлення отримується як послідовність елементів коду по дугах від кінцевої вершини до вершини даного повідомлення.

Як зазначено на рис. 2.3 довжини отриманих кодових комбінацій відповідають обчисленим за співвідношенням (2.16). Так, для повідомлення x_1

$$n_1 = E\left[\frac{-\log 0,25}{\log 2}\right] = E\left[-\log \frac{1}{4}\right] = 2,$$

а для x_7

$$n_7 = E[-\log 0,03] = E\left[-\log \frac{1}{33,3}\right] = 6.$$

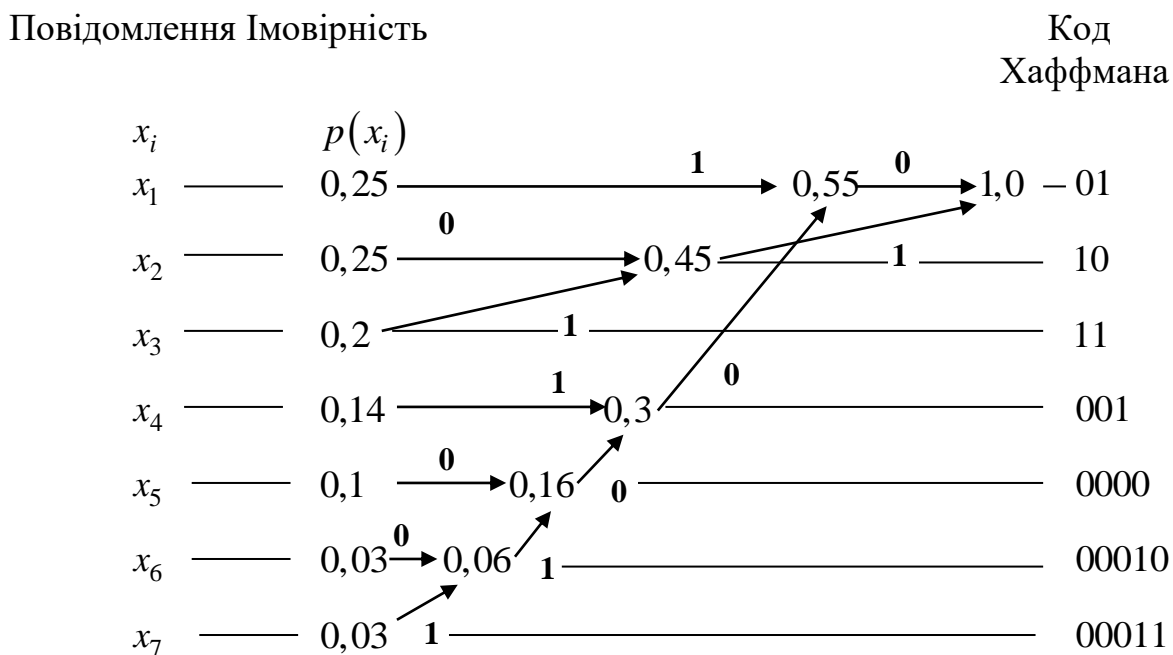


Рис. 2.3

За алгоритмом Хаффмана $n_7 = 5$. Це відображає той факт, що знаменник дроби в останній формулі практично не відрізняється від числа $2^5 = 32$, а вихідна формула для обчислення n_i є наближеною. Тому у варіанті визначення n_i за алгоритмом може бути їхній зсув в одну або в іншу сторону на невелике значення.

Як і КШФ, КХ має меншу надлишковість, ніж відповідний йому за числом кодових комбінацій нормальний двійковий код.

2.6. Неперешкодостійкі (звичайні) коди

2.6.1. Число-імпульсний (унітарний) код

Він відображає повідомлення A_i числом елементарних сигналів N_i , що формуються на певному інтервалі часу τ (пачка імпульсів), як це показано на рис. 2.4.

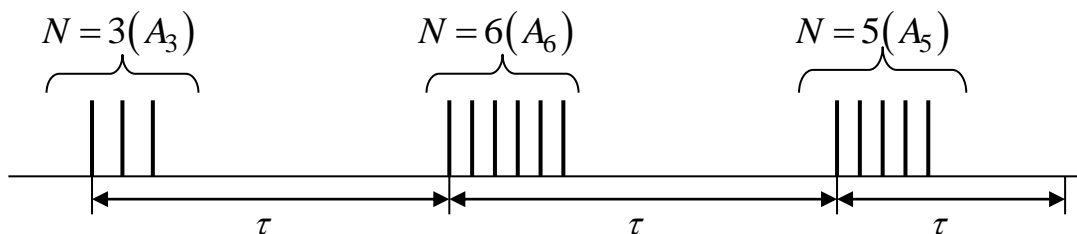


Рис. 2.4

Комбінації цього коду можуть мати числовий зміст, відображаючи, наприклад, значення параметрів технологічного процесу.

2.6.2. Нормальний двійковий код

Найбільше поширення отримав варіант нормального двійкового коду (НДК) 8-4-2-1 за десятковою вагою четвірки двійкових розрядів, починаючи зі старшого, $2^3 = 8$, $2^2 = 4$, $2^1 = 2$ і $2^0 = 1$. У загальному випадку десяткова вага n -розрядної комбінації НДК складає

$$W_{10} = \sum_{i=1}^n \alpha_i 2^{i-1}, \quad (2.18)$$

де i – номер розряду, починаючи з молодшого, $i = 1$, а α_i – значення i розряду НДК, 0 або 1.

НДК структурується за байтами – послідовними 8-розрядними частинами n -розрядної комбінації.

Іноді цей код розглядається як код на всі сполучення при $m = 2$. Дійсно, вся множина його комбінацій містить у собі підмножину комбінацій, що

містять одну «1», інші нулі, а їхня кількість дорівнює C_n^1 . Наступною є підмножина НДК на сполучення із двох «1» і $n-2$ нулів з кількістю комбінацій C_n^2 , на сполучення по 3 і т.д., до останньої, єдиної комбінації із всіх «1», на сполучення C_n^n .

Загальна кількість комбінацій НДК, крім нульової становить

$$N = \sum_{i=1}^n C_n^i = \sum_{i=0}^n C_n^i - 1 = (1+1)^n - 1 = 2^n - 1. \quad (2.19)$$

НДК у багатьох перешкодостійких кодах відображає повідомлення джерела і являє собою інформаційну частину кодової комбінації. На її основі обчислюються значення контрольних (перевірних) розрядів, які обумовлюють надлишковість і забезпечують спроможність такого коду виявляти або виправляти помилки.

Для ряду таких кодів застосуємо матричний метод генерації їхніх комбінацій. Зокрема, і сам k -розрядний НДК породжує одинична діагональна матриця, що повернута на кут 90° за годинниковою стрілкою,

$$G_{(k,k)} = \begin{vmatrix} 00 & \dots & 01 \\ 00 & \dots & 10 \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ 01 & \dots & 00 \\ 10 & \dots & 00 \end{vmatrix}, \quad (2.20)$$

яка складається з k рядків і k стовпців. У самій матриці міститься k комбінацій коду C_k^1 . Інші $2^n - 1$ комбінацій НДК отримують за допомогою порозрядного підсумовування рядків $G_{(k,k)}$ по двох, усього C_k^2 , по трьох – C_k^3 і т.д. до підсумовування всіх рядків – C_k^k , що дає кодову комбінацію, яка складається тільки з одиниць.

У СПП технологічного призначення комбінації НДК можуть мати, крім числового змісту, по вазі (2.18), також символічне значення, для відображення дискретних повідомлень кількістю до $2^k - 1$.

2.6.3. Код Грея

Комбінації коду Грея (КГ) отримуються шляхом лінійних перетворень розрядів НДК

$$\begin{cases} \alpha_n^{\Gamma} = \alpha_n^{\text{H}} \\ \alpha_i^{\Gamma} = \alpha_i^{\text{H}} \oplus \alpha_{i+1}^{\text{H}}. \end{cases} \quad (2.21)$$

Таким чином, старший розряд у КГ α_n^{Γ} повторює старший розряд НДК, α_n^{H} , а інші є сумами за модулем 2 поточного і старшого відносно поточного розрядів НДК. Зворотний перехід (перекодування) здійснюється згідно залежностей

$$\begin{cases} \alpha_n^{\text{H}} = \alpha_n^{\Gamma} \\ \alpha_i^{\text{H}} = \alpha_i^{\Gamma} \oplus \alpha_{i+1}^{\Gamma}. \end{cases} \quad (2.22)$$

В табл. 2.4 представлені кодові таблиці трьохрозрядних НДК та КГ, які підпорядковуються співвідношенням 2.21, 2.22.

Таблиця 2.4

Повідомлення	0	1	2	3	4	5	6	7
НДК	000	001	010	011	100	101	110	111
КГ	000	001	011	010	110	111	101	100

З їх розгляду випливає, що при переході від однієї комбінації КГ (в т. ч. від останньої до першої) до сусідньої в ній змінюється значення лише одного розряду, тоді як у відповідних комбінаціях НДК можуть змінюватися кілька розрядів. Така цікава властивість КГ дозволяє у деяких випадках, зокрема при кодуванні циклічно змінюючихся величин, зменшити порівняно з НДК середнє значення модуля похибки, яка виникає при викривленні розрядів коду під дією перешкоди. Цей ефект розглянемо на прикладі повідомлень, які є номером сектора диску, що міститься напроти маркеру в певний момент часу (рис. 2.5).

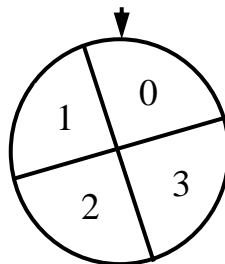


Рис. 2.5

Табл. 2.5 для НДК та КГ містить: первинні повідомлення, кодові комбінації, що їм відповідають, викривлені кодові комбінації при однократних помилках у старшому / молодшому розрядах, викривлене повідомлення, що отримується після декодування та модуль похибки. Під похибкою тут розуміється різниця між первинним та викривленим повідомленням.

Таблиця 2.5

Назва коду	Повідомлення	Первинна кодова комбінація	Викривлена кодова комбінація у старшому / молодшому розрядах	Викривлене повідомлення	Модуль похибки
НДК	0	00	10/01	2/1	2/1
	1	01	11/00	3/0	2/1
	2	10	00/11	0/3	2/1
	3	11	01/10	1/2	2/1
КГ	0	00	10/01	3/1	3(1)/1
	1	01	11/00	2/0	1/1
	2	11	01/10	1/3	1/1
	3	10	00/11	0/2	3(1)/1

З табл. 2.5 випливає, що для НДК у половині випадків модуль похибки становить 1, а у решті – 2, а у випадку КГ дорівнює 1 у всіх випадках окрім двох, де він становить 3. Але значення 3 відповідає суміжним секторам і еквівалентно значенню 1 на відміну від значення 2, що відповідає протилежним секторам. Тобто при значенні 2 середня похибка відліку у градусному вимірі вдвічі більша ніж при значеннях 1 та 3. При цьому слід зазначити, що КГ не є перешкодостійкий і не має властивостей виявлення або виправлення помилок.

Кодами Грея відображаються повідомлення джерел вимірювальних перетворювачів координат, такти перемикачів у так званих кінцевих автоматах, згадана особлива властивість КГ використовується також при каналному кодуванні, завдяки чому додатково поліпшується перешкодостійкість СПІ.

2.6.4. Двійково-десятковий код

В двійково-десятковому коді (ДДК) десяткові розряди числа відображаються четвірками двійкових розрядів тетрад (рис. 2.6). Тут показана структура ДДК із трьома десятковими розрядами; кожна тетрада являє собою одну з десяти комбінацій НДК – від 0000 до 1001 (інші 6 комбінацій у коді не використовуються).

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Старша тетрада} & & \text{Молодша тетрада} \\
 \underbrace{\alpha_{43}\alpha_{33}\alpha_{23}\alpha_{13}}_{w_{10}\cdot 10^2} & \underbrace{\alpha_{42}\alpha_{32}\alpha_{22}\alpha_{12}}_{w_{10}\cdot 10^1} & \underbrace{\alpha_{41}\alpha_{31}\alpha_{21}\alpha_{11}}_{w_{10}\cdot 10^0}
 \end{array}$$

Рис. 2.6

Тетради, починаючи з молодшої мають десяткові множники ваги 1, 10, 100 і т.д. Вага ж ДДК – сума десяткових ваг чисел, що записані в тетрадах. Так,

наприклад, ДДК 1000.0110.0001 має десяткову вагу

$$W_{10} = 8 \cdot 100 + 6 \cdot 10 + 1 \cdot 1 = 861.$$

Розглянутий код знаходить застосування в пристроях ручного введення й відображення десяткових чисел на цифрових відтворюючих приладах.

Відзначимо, що хоча ДДК і має надлишковість, але вона марна, тому що не підвищує достовірності передачі повідомлень у каналах з перешкодами.

2.7. Загальні властивості кодів, які виявляють і виправляють помилки

2.7.1. Геометричне подання комбінацій двійкових кодів

Залежно від розрядності НДК його комбінацій можуть відображатися в такий спосіб:

а) при числі розрядів $n=1$ геометрична модель – лінійний граф з вершинами 0 та 1, з'єднані дугою одиничної довжини $d=1$ (рис. 2.7, а);

б) якщо $n=2$, маємо плоский граф з вершинами 00, 01 11 і 10; його суміжні вершини розташовані на відстані $d=1$ (рис. 2.7, б);

в) для трирозрядного коду геометрична модель є просторовою, так званий одиничний куб (рис. 2.7, в), або розгортку – планарний граф (рис. 2.7, г);

г) при $n=4$ існує штучна просторова модель коду – гіперкуб; якщо $n > 4$, подання двійкового коду можливо лише у формі графів.

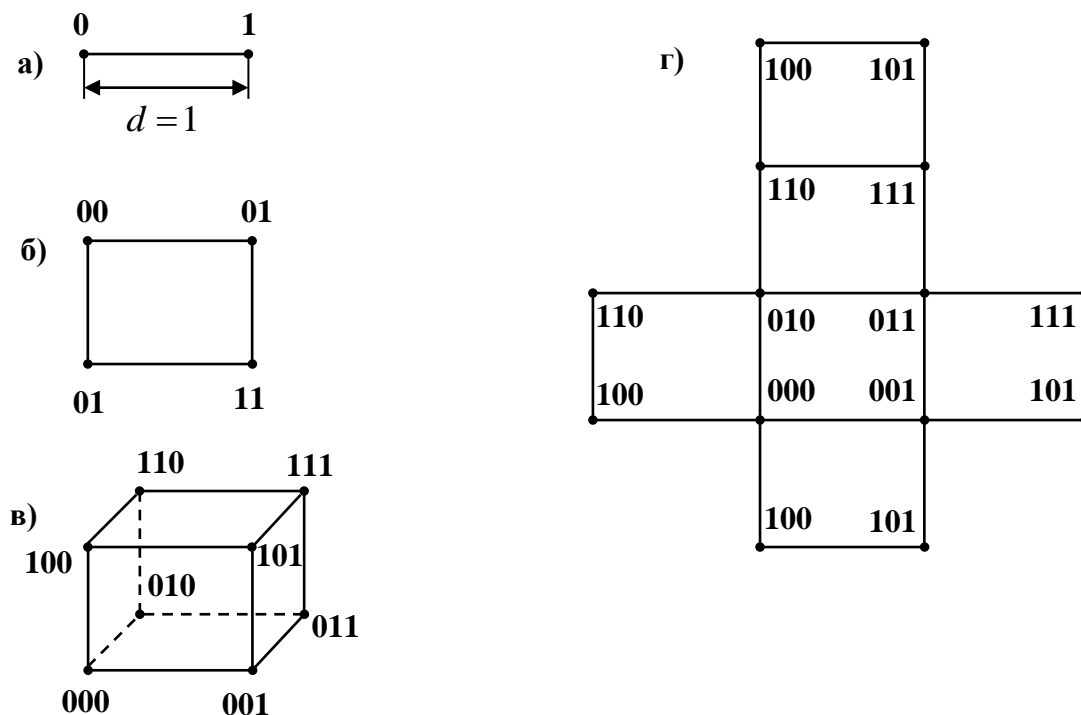


Рис. 2.7

Властивості коду щодо виявлення й виправлення помилок ґрунтуються на понятті відстані між його комбінаціями (відстані Хеммінга). Під відстанню d між двома комбінаціями мається на увазі кількість їх відповідних розрядів, що мають різні значення. Для двійкових кодів ця відстань може бути знайдена як число одиниць у порозрядній сумі за модулем 2 кодових комбінацій, що розглядаються. Наприклад,

$$\oplus \begin{array}{r} 011010 \text{ I комбінація} \\ 101011 \text{ II комбінація} \\ \hline 110001 \end{array} \quad d = 3.$$

2.7.2. Виявлення помилок у кодових комбінаціях

Для досягнення поставленої мети вся множина комбінацій НДК розділяється на дві підмножини – дозволених, із числом комбінацій N_0 , і заборонених – із числом N_3 , так що $N = N_0 + N_3$.

Дозволеними кодовими комбінаціями передаються повідомлення. Заборонені віддаляють дозволених одна від одної на відстані, які принаймні складають величину

$$d_{\min} = r + 1, \quad (2.23)$$

де r – кратність виявлених помилок, на яку розраховується даний код. Тобто величина d_{\min} визначається як мінімальна відстань між дозволеними комбінаціями і носить тут назву кодової відстані.

Так, при $n=3$, $r=1$ і $d_{\min}=2$ на моделі (рис. 2.7, в) дозволеними комбінаціями можуть бути, наприклад, ті, які позначені на рис. 2.8, а) жирними крапками.

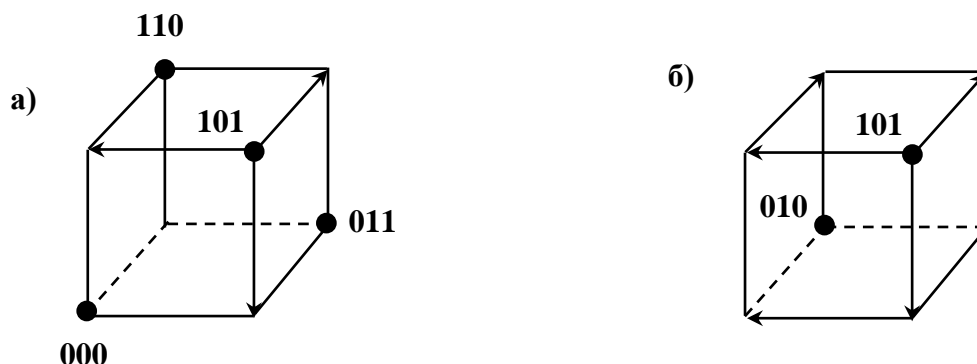


Рис. 2.8

Стрілками показано, як одна з дозволених комбінацій – 101 – однократними помилками переводиться в одну із заборонених – 100, 001 або 111. У цьому прикладі $N_0 = N_3 = 4$; виявлення однократних помилок, згідно (2.1), досягається ціною надлишковості $D = 0,33$.

Вимога виявлення дворазових помилок на моделі (рис. 2.8, б) залишає серед дозволених лише 2 комбінації, які розташовуються на одній з головних діагоналей куба, наприклад 010 і 101. Очевидно, що для них $d_{\min} = 3$, що відповідає умові (2.21) при $r = 2$. Стрілками показано, як одна з дозволених комбінацій – 101 – двократними помилками переводиться в одну із заборонених – 000, 011 або 110. Для цього прикладу $N_0 = 2, N_3 = 6$. Надлишковість цього коду природно більше, ніж у коді при $r = 1$ і становить 0,67.

Загальна умова існування коду, який виявляє помилки заданої кратності r , полягає у тому, що останні не повинні переводити одну дозволена комбінація в будь-яку іншу дозволена. При цьому належність комбінації до підмножини заборонених свідчить про наявність в ній принаймні однієї помилки.

На стороні прийому декодер будується таким чином, що він сприймає лише дозволена кодові комбінації. На появу будь-якої недозволена комбінації декодер видає узагальнений сигнал «помилка».

2.7.3. Виявлення й виправлення помилок у кодових комбінаціях

Як і у варіанті лише виявлення помилок вся множина комбінацій НДК розділяється на підмножини дозволених і заборонених комбінацій. Будь-яка пара комбінацій із числа дозволених повинна знаходитись на відстані, яка принаймні складає величину

$$d_{\min} = s + r + 1, \quad (2.24)$$

де s – кратність виправлених помилок із числа виявлених r .

Найбільш оцадливими кодами цього класу є такі, у яких $r = s$ і тоді (2.24) приймає вигляд:

$$d_{\min} = 2s + 1. \quad (2.25)$$

Загальна умова існування розглянутого коду полягає у тому, що заборонені підмножини комбінацій, що відповідають двом будь-яким з дозволених, не повинні перетинатися.

Приклад такого коду при $n = 3$ й $s = 1$ ($d_{\min} = 3$) наведений на рис. 2.5, б. У якості дозволених тут призначені комбінації 010 і 101. Першій з них при однократних помилках відповідають комбінації 110, 000, 011, а другій – 001, 111 і 100; жодна із заборонених кодових комбінацій однієї підмножини не міститься в іншій.

При одержанні забороненої кодової комбінації декодер приймача на основі встановленого d_{\min} визначає найближчу дозволена комбінацію, що і буде результатом виправлення комбінації з помилками.

Зазначимо, що виправлення помилок за допомогою такого кода можливо, якщо помилки вищої кратності відсутні.

Загальної теорії розглянутих кодів не існує, також немає для них єдиних алгоритмів кодування й декодування. Однак, як було згадано раніше, розроблені коди, які забезпечують будь-яку необхідну вірогідність передачі повідомлень у каналах зв'язку з перешкодами.

Далі розглядаються такі коди, у тому числі ті, що знайшли застосування в СПІ технологічного призначення.

2.8. Найпростіші коди, які виявляють помилки

В основу цих кодів покладені елементарні логічні міркування, що не вимагають спеціального математичного обґрунтування. У той самий час деякі з них, наприклад, код «пар», який є найпростішим із класу лінійних систематичних, мають теоретичне обґрунтування спроможності виявляти й виправляти помилки.

Властивості частини цих кодів визначаються в припущенні випадковості й взаємозалежності появи помилок у кодових комбінаціях.

При імовірності помилки елемента коду p , імовірність його правильного приймання дорівнює $1 - p$. Імовірність того, що кодова комбінація довжиною n прийнята правильно становить

$$q_k = (1 - p)^n, \quad (2.26)$$

а того, що вона містить принаймні одну помилку

$$p_k = 1 - q_k = 1 - (1 - p)^n. \quad (2.27)$$

У СПІ технологічного призначення нормується припустиме значення імовірності p , яке дорівнює 10^{-4} . При невеликій довжині кодових комбінацій у цих умовах членами з вищими ступенями p у виразі (2.27) можна знехтувати і визначити імовірність помилкового приймання кодової комбінації як

$$p_k \approx n \cdot p. \quad (2.28)$$

2.8.1. Код «пар» або код, що має захист за паритетом

Цей код є систематичним. У цьому коді k -розрядна інформаційна частина в НДК доповнюється контрольним розрядом, у якому записується «0» або «1». В комбінації цього коду довжиною $n = k + 1$ завжди міститься парне число одиниць. Іноді використовується варіант такого коду – «непар», з непарним числом одиниць. Властивості цих варіантів коду рівноцінні.

Код має $d_{\min} = 2$, виявляє всі помилки непарної кратності і не виявляє помилки парної кратності.

При випадкових і незалежних помилках імовірність виникнення помилок у кодовій комбінації довжиною n підпорядковується розподілу Бернуллі (1.26).

Сумарна імовірність помилок, які виявляються, становить

$$p_B = \sum_{i=0}^{\infty} C_n^{2i+1} p^{2i+1} (1-p)^{n-2i-1}, \quad (2.29)$$

а тих, що не виявляються,

$$p_H = \sum_{i=1}^{\infty} C_n^{2i} p^{2i} (1-p)^{n-2i}. \quad (2.30)$$

При імовірності перекручення розряду коду $p = 10^{-4}$ й менше, а також невеликих n третій співмножник у формулі Бернуллі близький до одиниці. Тоді суми (2.29), (2.30) можуть бути записані відповідно як

$$p_B \approx C_n^1 p + C_n^3 p^3 + \dots, \quad (2.31)$$

$$p_H \approx C_n^2 p^2 + C_n^4 p^4 + \dots. \quad (2.32)$$

Другі доданки в цих формулах менше перших, тому ними (і іншими в сумах) можемо зневажити.

Уведемо поняття ефективності коду щодо виявлення помилок

$$\eta = \frac{p_B}{p_H}. \quad (2.33)$$

Для коду «пар» вказана величина становить

$$\eta \approx \frac{C_n^1 p}{C_n^2 p^2} = \frac{\frac{n!}{(n-1)!1!} \cdot p}{\frac{n!}{(n-2)!2!} \cdot p^2} = \frac{2}{p(n-1)}. \quad (2.34)$$

Оцінимо отриманий результат для значень $p = 10^{-4}$ і $n = 9$.

$$\eta = \frac{2}{10^{-4}(9-1)} = \frac{2500}{1}.$$

Це значить, що приблизно на 2500 помилок, які виявляються, у кодї «пар» буде припадати одна невиявлена.

Згідно (2.2) надлишковість коду становить

$$D = 1 - \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}. \quad (2.35)$$

Код «пар» використовується в каналах з низьким рівнем перешкод і передачі сигналів на невеликі відстані.

2.8.2. Коди, що мають сталу вагу (коди на одне з'єднання)

Є несистематичними. Дані коди довжиною n мають сталу вагу (число одиниць у комбінації) w і утворюються за правилами з'єднань. Число комбінацій такого коду складає

$$N_0 = C_n^w = \frac{n!}{(n-w)!w!}. \quad (2.36)$$

Деяке поширення має код C_n^1 , число комбінацій якого $N_0 = n$. Цей код неефективний, але може являти собою інформаційну частину інверсного коду (див. п. 2.8.3).

Більшу популярність мають коди C_5^2 , $N_0 = 10$ і C_7^3 , $N_0 = 35$. Перший з них відображає десяткові цифри, а другий – букви алфавітів і символи.

Як приклад наведемо комбінації коду C_5^2 :

«1» – 00011, «2» – 00101, «3» – 01001, «4» – 10001, «5» – 00110
«6» – 01010, «7» – 10010, «8» – 01100, «9» – 10100, «10» – 11000.

Ефективність коду на одне з'єднання може бути визначена в такий спосіб. Очевидно, що код C_n^w виявляє всі помилки, які дають комбінації із числом одиниць, що не дорівнюється w .

Помилки найменшої кратності, що не виявляються – парний зсув двох розрядів, в одному з яких відбувається зсув $1 \rightarrow 0$, а в іншому – $0 \rightarrow 1$.

Ймовірність такої події, на підставі викладеного вище, визначається як

$$P_H \approx C_w^1 \cdot C_{n-w}^1 \cdot p^2, \quad (2.37)$$

а, згідно (2.28), ймовірність виявлення помилки складає

$$P_B \approx P_k - P_H \approx n \cdot p - C_w^1 \cdot C_{n-w}^1 \cdot p^2. \quad (2.38)$$

Остаточна ефективність коду на одне з'єднання становить

$$\eta = \frac{p_B}{p_H} \approx \frac{n \cdot p - C_w^1 \cdot C_{n-w}^1 \cdot p^2}{C_w^1 \cdot C_{n-w}^1 \cdot p^2}, \quad (2.39)$$

що вище, ніж у кодї «пар» з тим самим числом розрядів n . Але коди на одне сполучення мають більшу надлишковість. Так, у кодї «пар» число дозволених комбінацій складає біля половини, а, наприклад, для коду C_5^2 – третину.

2.8.3. Кореляційний, інверсний і коди контрольних сум даних

2.8.3.1. Кореляційний код (КК)

Є систематичним. Отримується із НДК заміною одного розряду останнього на пару розрядів за правилом: $0 \rightarrow 01, 1 \rightarrow 10$. Таким чином, комбінація НДК 001011 перетвориться в комбінацію 010110011010 КК.

Довжина даного коду $n = 2k$, де k розрядів НДК являють собою код повідомлення або інформаційну частину кореляційного коду.

Помилки нижньої кратності, що не виявляються, у КК – це одночасна трансформація двох його розрядів, що відображують будь-який розряд НДК.

Аналогічно співвідношенням (2.37) – (2.39) для КК можна записати

$$\begin{cases} p_H \approx C_k^1 \cdot p^2 \\ p_B \approx n \cdot p - C_k^1 \cdot p^2 \\ \eta = \frac{n \cdot p - C_k^1 \cdot p}{C_k^1 \cdot p^2} \end{cases} \quad (2.40)$$

Надлишковість КК складає $D = 0,5$. Власно кореляційний код у цей час не становить інтересу, але є основою для порівняння з інверсним кодом, котрий при тій же надлишковості перевершує КК за спроможністю виявлення помилок.

2.8.3.2. Інверсний код (ІК)

Є систематичним, у якому НДК повідомлення доповнюється контрольною частиною тої самої довжини, що й інформаційна, тому довжина ІК становить $n = 2k$.

Контрольна частина утвориться за правилом: якщо інформаційна частина (НДК) містить парне число одиниць, то контрольна повторює її, а при непарному числі одиниць в інформаційній частині, контрольна частина утворюється внаслідок порозрядної інверсії інформаційної частини повідомлення.

Наприклад, НДК 0101 відповідає ІК 01010101, а НДК 0111 – ІК 01111000.

Аналіз показує, що розглянутий код має $d_{\min} = 4$. Помилками нижньої кратності, що не виявляються, у комбінаціях КК є подвійні зсуви пари розрядів, що відповідають тим самим розрядів НДК повідомлення. Наприклад, у комбінації 01111000 трансформуються розряди, відзначені «*». У результаті одержуємо комбінацію 11100001, що відноситься до підмножини дозволених, але відображує помилкове повідомлення.

Співвідношення (2.40) для КК набувають вигляду

$$\begin{cases} p_H \approx C_k^2 \cdot p^4 \\ p_B \approx n \cdot p - C_k^2 \cdot p^4 \\ \eta = \frac{n \cdot p - C_k^2 \cdot p^4}{C_k^2 \cdot p^4} \end{cases} \quad (2.41)$$

Надлишковість КК складає $D \approx 0,5$ (комбінація, що складається з одних нулів у цьому коді відсутня). Порівняння p_H КК і КК показує, що в останнього ця імовірність на кілька порядків нижче, що суттєво для таких повідомлень, як команди управління в технологічних системах.

2.8.3.3. Коди контрольних сум даних (коди Бергера)

Є систематичними. У цих кодах k -розрядна інформаційна частина доповнюється $\mu = E[\log k]$ розрядами «контрольної суми», що може визначатися різними способами залежно від властивостей каналу зв'язку. Так, для асиметричного каналу, де співвідношення імовірностей трансформацій сигналів $p(0/1) > p(1/0)$, у контрольній частині коду записується інверсія двійкового числа, вага якого дорівнює числу одиниць інформаційної частини.

Так, наприклад, якщо код повідомлення 1101101 ($k=7, \mu=3$), то код Бергера (КБ) буде отриманий у такий спосіб. Число одиниць в інформаційній частині дорівнює 5, а відповідне двійкове число, що відповідає вазі – 101. Отже, контрольна частина буде 010, а код у цілому 1101101010.

При декодуванні прийнятої кодової комбінації аналогічно, як і при кодуванні обчислюється контрольна частина й вона порівнюється з переданою. Перехід будь-якого числа одиниць у нулі в КБ приводить до того, що десяткове значення обчисленої контрольної частини буде менше, ніж відповідне значення інвертованої переданої.

Нехай отримана вище кодова комбінація прийнята з потрібною помилкою й має вигляд 1000100010. Обчислена за інформаційною контрольна частина становитиме 010 (2), а інвертована передана – 101 (5). Таким чином

помилки виявлені. У загальному випадку нерівність контрольних частин є ознакою помилок.

При появі помилок вигляду $0 \rightarrow 1$ ефективність КБ зменшується, зокрема за рахунок невиявляємих помилок нижньої кратності – зсуву двох розрядів інформаційної частини коду.

КБ одержали деяке поширення в локальних комп'ютерних мережах. У каналах зв'язку великої довжини, зокрема каналах систем телемеханіки, ці коди не використовуються.

2.9. Лінійні систематичні коди (ЛСК)

2.9.1. Загальні відомості. Постановка задачі кодування з виявлення та виправлення помилок

Клас розглянутих кодів був відкритий на початку 1940-х років Хеммінгом, коли виникла потреба підвищення вірогідності обчислень на перших ЕОМ.

Математичний апарат цих кодів – лінійна алгебра, засобами якої можливо забезпечувати задане d_{\min} між кодовими комбінаціями дозволеної підмножини. Для цього в НДК повідомлень вводяться контрольні розряди, значення яких обчислюються підсумовуванням за модулем 2 певних інформаційних розрядів.

Хеммінг довів, що для $d_{\min} = 3$ при виправленні однократних помилок необхідно виконати умову

$$2^{n-k} = 2^{\mu} \geq n + 1. \quad (2.42)$$

Логіка цього виразу полягає в наступному: число кодових комбінацій контрольних розрядів не повинно бути менше, ніж довжина коду n (одночасно це число варіантів розміщення перекрученого розряду), а також варіант одержання неспотвореної кодової комбінації. Найбільш ощадливі лінійні коди виходять, якщо (2.42) буде рівністю $2^{\mu} = n + 1$, звідки число контрольних розрядів

$$\mu = E[\log(n + 1)]. \quad (2.43)$$

Для цілих n , μ і $k = n - \mu$ одержимо наступний ряд чисел

n	3	7	15	31	...
μ	2	3	4	5	...
k	1	4	11	26	...

Для більших значень d_{\min} отримані наступні значення чисел контрольних розрядів, зокрема

$$d_{\min} = 4 \quad \mu \geq E[\log(2 \cdot n)],$$

$$d_{\min} = 5 \quad \mu \geq E\left[\log\left(1 + n + \frac{n \cdot (n-1)}{2}\right)\right] \text{ і т.д.}$$

Є також узагальнені оцінки нижніх значень μ , наприклад, оцінка Хеммінга, яка може бути застосована при непарних значеннях d_{\min}

$$\mu \geq E\left[1 + \sum_{i=1}^{(d_{\min}-1)/2} C_n^i\right]. \quad (2.44)$$

За Хеммінгом контрольні розряди розміщуються на певних позиціях усередині n -розрядної кодової комбінації. При деяких перевагах такого рішення в нього є й недоліки, яких позбавлений різновид лінійних – систематичні коди (ЛСК), у яких контрольні розряди відокремлені й слідуєть за інформаційними.

2.9.2. Основні властивості ЛСК, матричний метод кодування повідомлень

Надалі структуру ЛСК уявляємо у вигляді блоку

$$x_1 x_2 \dots x_{k-1} x_k y_1 y_2 \dots y_{\mu-1} y_{\mu},$$

де x_i, y_j – відповідно « i » інформаційний і « j » контрольний розряди.

Контрольні розряди обчислюються як суми за модулем 2

$$y_j = c_{1j} \cdot x_1 \oplus \dots \oplus c_{ij} \cdot x_i \oplus \dots \oplus c_{kj} \cdot x_k, \quad (2.45)$$

$$c_{ij} \in \{0,1\}.$$

Загального методу вибору значень співмножників c_{ij} для обчислення конкретного розряду y_j не існує, але відомі критерії, яким повинні задовольняти суми (2.45).

Оскільки інформаційна частина ЛСК – це НДК, який породжується матрицею (2.18), а контрольна – лінійні перетворення (2.45), ЛСК у цілому породжується твірною матрицею

$$G_{(n,k)} = \left| G_{(k,k)}, R_{(k,n-k)} \right|, \quad (2.46)$$

де $G_{(k,k)}$ – інформаційна, а $R_{(k,n-k)}$ – контрольна підматриці.

Рядки матриці $G_{(n,k)}$ є дозволеними кодовими комбінаціями даного ЛСК і мають такі властивості:

1. Нульова комбінація в твірній матриці відсутня, але в коді є дозволеною.

2. Вага рядку (число одиниць у ньому) твірної матриці повинна бути не менш d_{\min} .

3. Порозрядна сума за модулем 2 будь-яких сполучень рядків матриці також є дозволеною комбінацією цього ЛСК.

4. Порозрядна сума за модулем 2 будь-яких рядків матриці не повинна перетворюватися в нульову. Ця вимога забезпечує лінійну незалежність комбінацій ЛСК на основі відповідного вибору сум (2.45).

Як приклад розглянемо синтез ЛСК $G_{(7,4)}$, що при $d_{\min} = 3$ буде мати $k = 4$ інформаційних і $\mu = 3$ контрольних розрядів.

Один з варіантів обчислення значень контрольних розрядів за (2.45) дає наступні їхні значення

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \\ y_2 = x_2 \oplus x_3 \oplus x_4 \\ y_3 = x_1 \oplus x_3 \oplus x_4 \end{cases} \quad (2.47)$$

Твірна матриця даного ЛСК $G_{(7,4)}$ буде мати вигляд

$$G_{(7,4)} = \left| \begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \right|. \quad (2.48)$$

Тут y_1, y_2, y_3 для першого рядка матриці згідно (2.47) $y_1 = 0 \oplus 0 \oplus 0 = 0$, $y_2 = 0 \oplus 0 \oplus 1 = 1$ і $y_3 = 0 \oplus 0 \oplus 1 = 1$, у контрольних частинах інших рядків матриці значення y_j одержуються аналогічно.

Усього цей код, згідно (2.17), має $2^4 - 1 = 15$ ненульових кодових комбінацій, з яких 4, де в інформаційній частині є одна одиниця, записані у вигляді рядків твірної матриці. Решта комбінацій отримується внаслідок

підсумовування за модулем 2 будь-яких сполучень рядків твірної матриці, як це було показано у п. 2.6.2 для НДК.

Оскільки d_{\min} ЛСК збігається з мінімальним числом одиниць у його комбінаціях, що є рядками твірної матриці (2.48), а в інформаційній частині рядка міститься одна одиниця, то в контрольних частинах рядків матриці $G_{(n,k)}$ повинно бути не менш $d_{\min} - 1$ одиниць.

Другим критерієм правильності вибору форм (2.46) є те, що у контрольній частині порозрядної суми за модулем 2 двох будь-яких рядків матриці $G_{(n,k)}$ повинно бути не менш $d_{\min} - 2$ одиниць.

Якщо в (2.45) усі коефіцієнти $c_{ij} = 1$, ЛСК переходить в код «пар» з єдиним контрольним розрядом $y_1 = \sum_{i=1}^k x_i$.

Автори – Голей, Малер, Макдональд, Варшамов та ін. – запропонували різновиди ЛСК, які мають власні корисні коригувальні особливості.

2.9.3. Методи декодування ЛСК, які тільки виявляють або також виправляють помилки в даних

У класі лінійних кодів ці методи ґрунтуються зокрема на еквівалентності операцій додавання й віднімання в полі за модулем 2. Це приводить до того, що в сумах (2.45) доданки можуть переноситися з однієї частини в іншу без зміни знака. Вказані методи будуть розглянуті на конкретних прикладах.

2.9.3.1. Метод перевірних рівнянь

Для коду $G_{(7,4)}$ з (2.47) за відсутності помилок можна одержати

$$\begin{cases} x'_1 \oplus x'_2 \oplus x'_3 \oplus y'_1 = 0 & I \\ x'_2 \oplus x'_3 \oplus x'_4 \oplus y'_2 = 0 & II \\ x'_1 \oplus x'_3 \oplus x'_4 \oplus y'_3 = 0 & III \end{cases} \quad (2.49)$$

Знак «'» позначає, що мова йде про значення розрядів ЛСК, що зафіксовані на стороні прийому.

Варто мати на увазі, що у цьому прикладі $d_{\min} = 3$ і при виявленні помилок відрізнитися від переданих можуть не більше ніж два прийнятих розряди, а при виправленні – тільки один.

Ознакою наявності помилок є незадоволення хоча б одного з рівнянь (2.49).

Якщо поставлено задачу виправлення помилки, то перевіряється виконання всіх рівнянь системи (2.49). При цьому можливі варіанти помилок, при яких не задовольняються відповідні рівняння, мають вигляд:

1. Помилка в $x'_1 - I$ и III ;
2. Помилка в $x'_2 - I$ и II ;
3. Помилка в $x'_3 - I, II$ и III ;
4. Помилка в $x'_4 - II$ и III .

5. Помилка в одному з контрольних розрядів – I або II , або III – не потребує виправлення, яке має сенс тільки щодо інформаційних розрядів.

Перевірки рівнянь (2.49) називають перевітками на парність. Якщо число одиниць у сумі парне, то це є частковим підтвердженням правильності прийнятого коду даним рівнянням.

Якщо твірна матриця відома, то за її допомогою можуть бути отримані перевірні рівняння (2.49) на основі перевірної матриці, що складається з одиничної підматриці розміру $(\mu \times \mu)$ й приписаної ліворуч підматриці $(k \times \mu)$, що являє собою контрольну підматрицю $R_{(k,n-k)}$ коду, яку повернуто на 90° за годинниковою стрілкою. Для наведеного вище приклада ця матриця має вигляд

$$M_{(7,3)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}. \quad (2.50)$$

Кожному рівнянню (2.49) відповідає рядок матриці (2.50). Ліва частина рівняння отримується як сума за модулем 2 розрядів коду з коефіцієнтами, якими є елементи відповідного рядка матриці.

2.9.3.2. Метод синдромів

У цьому методі вводиться поняття вектора помилки, якщо вона однократна – то це n розрядна кодова комбінація, що містить одиницю на позиції трансформованого розряду, а на інших $n - 1$ позиціях – нулі.

Для розглянутого ЛСК $G_{(7,4)}$ вектор помилки $V_{II} = 0100000$ буде відповідати трансформації елемента x_2 , а $V_{II} = 0000001$ – y_3 . Перекручену кодову комбінацію ЛСК можна уявити як порозрядну суму за модулем 2 переданої кодової комбінації V й коду помилки

$$V' = V \oplus V_{II}. \quad (2.51)$$

Тепер виконання перевірки на задоволення умов (2.47) для комбінації коду V' може проводитися роздільно для V і V_{II} .

З використанням перевірної матриці (2.50) у процесі обчислення сум (2.49) одержуються елементи синдрому S – коду помилки, що однозначно

відповідає позиції перекрученого розряду

$$S = M \cdot V' = M \cdot (V \oplus V_{II}) = M \cdot V \oplus M \cdot V_{II} = 0 \oplus M \cdot V_{II} = M \cdot V_{II}. \quad (2.52)$$

Отриманий вираз свідчить про те, що вектор розрядів синдрому збігається зі стовбцем перевіркої матриці, номером якого є номер помилкового розряду.

Так, розряди синдрому для $V_{II} = 0001000$ (трансформований елемент x_4) будуть мати вигляд

$$\begin{cases} S_{II1} = x_{II1} \oplus x_{II2} \oplus x_{II3} \oplus y_{II1} = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = 0 \\ S_{II2} = x_{II2} \oplus x_{II3} \oplus x_{II4} \oplus y_{II2} = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 1. \\ S_{II3} = x_{II1} \oplus x_{II3} \oplus x_{II4} \oplus y_{II3} = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 1 \end{cases} \quad (2.53)$$

Отже, синдром коду помилки 0001000 $S_{II} = 011$. Для коду $G_{(7,4)}$ при однократних помилках усього буде 7 синдромів, які, як випливає з табл. 2.6, однозначно визначають позицію трансформованого розряду, а отже, і розряд, який варто виправити.

Таблиця 2.6

V_{II}	1000000	0100000	0010000	0001000	0000100	0000010	0000001
S_{II}	101	110	111	011	100	010	001

Недоліком цього методу є істотне збільшення кількості перевірок за синдромами при зростанні вимог не тільки до коригувальної, але й виявляючої спроможності коду.

Так, якщо поставлено задачу виявлення не тільки однократних, але й двократних помилок, то додатково до синдромів (табл. 2.6) повинні бути обчислені й синдроми подвійних помилок, кількість яких дорівнюватиме

$$C_n^2 = C_7^2 = \frac{7!}{(7-2)!2!} = \frac{5! \cdot 7}{5! \cdot 2} = 21.$$

На методі синдромів ґрунтується код Хеммінга, який при кодовій відстані $d_{\min} = 3$ забезпечує виправлення однократних помилок, а при $d_{\min} = 4$ – виправлення однократних та виявлення двократних помилок.

Розглянемо приклад побудови коду Хеммінга при $d_{\min} = 3$, $k = 4$, $n = 7$, $m = 3$. Будемо вважати, що в кодовій комбінації перші k розрядів є інформаційними, а ті, що залишилися – контрольними, хоча ця умова не є обов'язковою. Так, у оригінальному варіанті, який був запропонований Хеммінгом, контрольні розряди розташовуються на позиціях з номерами, які є ступенями двійки. При декодуванні виконується три перевірки, внаслідок чого

формується трирозрядний синдром помилки. Значення синдрому й відповідні номери помилкових розрядів наведені в табл. 2.7.

Таблиця 2.7

Десяткове число	Значення розрядів синдрому помилки S_{II}			Помилковий розряд
	3	2	1	
1	0	0	1	y_1
2	0	1	0	y_2
3	0	1	1	x_1
4	1	0	0	y_3
5	1	0	1	x_2
6	1	1	0	x_3
7	1	1	1	x_4

Відповідність між значеннями розрядів синдрому та номером помилкового розряду встановлено з тих міркувань, що кожний контрольний розряд охоплюється тільки однією перевіркою й, отже, контрольним розрядам $y_1 - y_3$ повинні відповідати синдроми з одиничною вагою. Решта синдромів поставлена у відповідність інформаційним розрядам у природному порядку. На підставі даних таблиці може бути записана перевірна матриця, яка являє собою матрицю значень розрядів синдрому помилки, повернуту на кут 90° проти годинникової стрілки та впорядковану за зростанням номеру помилкового розряду у кодовій комбінації

$$M_{(7,3)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}. \quad (2.54)$$

Тоді співвідношення для визначення розрядів синдрому помилки будуть мати вигляд

$$\begin{cases} S_{II1} = x_1 \oplus x_2 \oplus x_4 \oplus y_1 \\ S_{II2} = x_1 \oplus x_3 \oplus x_4 \oplus y_2 \\ S_{II3} = x_2 \oplus x_3 \oplus x_4 \oplus y_3 \end{cases} \quad (2.55)$$

Після отримання значень розрядів синдрому, помилковий розряд визначається за допомогою табл. 2.5. Помилковий розряд також відповідає стовпцю перевірної матриці, який збігається з вектором синдрому помилки.

2.9.3.3. Метод мажоритарного декодування

Під час використання цього метода для кожного інформаційного розряду спільно розглядаються його значення, які отримуються на основі значень інших розрядів та всіх рівнянь вигляду (2.45), до яких він входить з ненульовим коефіцієнтом, а також значення розряду, яке безпосередньо присутнє у кодовій комбінації.

Розглянемо цей метод для коду $G_{(6,3)}$ з $k=3$, $\mu=3$, $n=3$ і $d_{\min}=3$ й контрольними розрядами, які обчислюються за співвідношеннями

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \oplus x_2 \\ y_2 = x_2 \oplus x_3 \\ y_3 = x_1 \oplus x_3 \end{cases} \quad (2.56)$$

Твірна матриця цього коду має вигляд

$$G_{(6,3)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}. \quad (2.57)$$

З урахуванням можливості переносу змінних в (2.56) з однієї частини рівняння в іншу без зміни знака складаються групи незалежних перевірок

$$\begin{cases} x_1 = x'_2 \oplus y'_1 \\ x_1 = x'_3 \oplus y'_3 \\ x_1 = x'_1 \end{cases} I \quad \begin{cases} x_2 = x'_1 \oplus y'_1 \\ x_2 = x'_3 \oplus y'_2 \\ x_2 = x'_2 \end{cases} II \quad \begin{cases} x_3 = x'_2 \oplus y'_2 \\ x_3 = x'_1 \oplus y'_3 \\ x_3 = x'_3 \end{cases} III. \quad (2.58)$$

Тут, як і раніше, індексом «'» позначені елементи прийнятої кодової комбінації.

Рішення про результат перевірки у випадку тільки виявлення одно- або двократних помилок приймається за неоднорідністю результатів хоча б в одній з перевірок I , II , III .

Наприклад, у випадку трансформації двох розрядів ЛСК 001011^{*} виникає комбінація 011010 і для неї згідно (2.58) незалежні перевірки мають вигляд

$$\begin{cases} x_1 = 1 \oplus 0 = 1 \\ x_1 = 1 \oplus 0 = 1 \\ x_1 = 0 \end{cases} I \quad \begin{cases} x_2 = 0 \oplus 0 = 0 \\ x_2 = 1 \oplus 1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases} II \quad \begin{cases} x_3 = 1 \oplus 1 = 0 \\ x_3 = 0 \oplus 0 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases} III. \quad (2.59)$$

Оскільки в перевірках отримані неоднорідні результати, то в прийнятому коді є помилки.

Якщо поставлено задачу виправлення помилок (а для коду $G_{(6,3)}$ при $d_{\min} = 3$ вони можуть бути тільки однократними), то рішення про імовірне значення інформаційного розряду приймається «по більшості» значень, отриманих у всіх перевірках (2.58), які стосуються цього розряду.

Припустимо, що в коді $G_{(6,3)}$ з твірною матрицею (2.57) комбінація 001011 перекручена в розряді x_2 , внаслідок чого прийнята кодова комбінація має вигляд 011011. Незалежні перевірки виконуються за рівняннями (2.58)

$$\begin{cases} x_1 = 1' \oplus 0' = 1 \\ x_1 = 1' \oplus 1' = 0 \\ x_1 = 0' \end{cases} \Rightarrow x_1 = 0; \begin{cases} x_2 = 0' \oplus 0' = 0 \\ x_2 = 1' \oplus 1' = 0 \\ x_2 = 1' \end{cases} \Rightarrow x_2 = 0; \begin{cases} x_3 = 1' \oplus 1' = 0 \\ x_3 = 0' \oplus 1' = 1 \\ x_3 = 1' \end{cases} \Rightarrow x_3 = 1. \quad (2.60)$$

Таким чином, у прийнятій кодовій комбінації виправлена помилка в розряді x_2 й відновлений правильний код переданого повідомлення становить 001011.

Лінійні коди в СПІ технологічного призначення практично не використовуються, однак методики їхнього синтезу й декодування досить корисні при вивченні більш ефективних кодів в каналах зв'язку, де помилки в кодових комбінаціях мають тенденцію до групування, а декодування може здійснюватися альтернативними шляхами.

2.10. Циклічні коди (ЦК)

2.10.1. Загальні відомості. Двійкове й алгебраїчне подання комбінацій циклічних кодів

Циклічні коди (ЦК) були розроблені Хаффманом у середині 50-х років минулого століття на основі теорії полів Галуа двійкових багаточленів $GF(2^n)$. В цих полях коефіцієнти багаточленів можуть приймати значення $c_i \in \{0,1\}$, операція додавання елементів поля проводиться за модулем 2 і еквівалентна відніманню. Назву ЦК одержали через найпростіший метод одержання їхніх комбінацій – шляхом циклічного зсуву вихідної n -розрядної комбінації вліво з переносом зі старшого розряду в молодший.

Так, якщо вихідна комбінація даного ЦК 1100101, то послідовний зсув дає наступні його комбінації: 1001011, 0010111 і т.д.

Існує також спосіб запису n -розрядної комбінації ЦК у вигляді багаточлену фіктивної змінної x :

$$F(x) = c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \dots + c_1x^1 + c_0x^0. \quad (2.61)$$

Відповідно до цього наведена вище комбінація ЦК 1100101 записується як $F(x)_1 = x^6 + x^5 + x^2 + 1$; її циклічні зсуви одержуємо послідовним множенням $F(x)_1$ на x з урахуванням того, що $x^{n-1} \cdot x = x^0 = 1$. Тоді $F(x)_2 = F(x)_1 \cdot x = x^6 + x^3 + x + 1$, $F(x)_3 \cdot x = x^4 + x^2 + x + 1$ і т.д. Підсумовуючи наведені кодові комбінації ЦК, одержуємо зокрема $F(x)_1 + F(x)_2 = x^5 + x^3 + x^2 + x$ або у двійковому вираженні 0101110.

Слід зазначити, що множини комбінацій ЦК, створених циклічним зсувом, для цілей перешкодостійкого кодування непридатні, тому що в них інформаційна й контрольна частини при зсувах зміщуються, і виділити їх зокрема на стороні приймання практично неможливо.

2.10.2. Методика побудови систематичного ЦК

В основу цієї методики покладена теорема, у якій доводиться, що такий ЦК – це множина багаточленів (кодових комбінацій) ступеня $n - 1$ й менш, які без остачі діляться на так званий твірний (породжуючий) багаточлен $P(x)$, що є одним зі співмножників (або добутку декількох співмножників) розкладання бінома $x^n + 1$.

Таке подання комбінацій ЦК дозволяє одержати їх у систематичній формі

$$x_1 x_2 \dots x_k x_{k+1} x_{k+2} \dots x_{k+\mu}, \quad (2.62)$$

де $x_1 \dots x_k$ – інформаційні, а $x_{k+1} \dots x_{k+\mu}$ – контрольні розряди комбінації, $n = k + \mu$, при цьому число контрольних розрядів μ – це ступінь твірного багаточлена $P(x)$.

Твірний багаточлен повинен бути незвідним, або добутком декількох незвідних багаточленів. Останні задовольняють наступним вимогам:

1. багаточлен є дільником багаточлена $x^{2^n - 1} + 1$;
2. багаточлен ділиться без остачі тільки сам на себе, або на одиницю;
3. коефіцієнтом при нульовому ступені є одиниця;
4. число членів з ненульовими коефіцієнтами є непарним (за винятком двочлену $x + 1$).

Таблиця незвідних багаточленів ступеню до 10-го включно наведена у додатку. Крім того, для ЦК $F_{(n,k)}$, твірний багаточлен повинен також задовольняти умовам:

5. ступінь багаточлена μ дорівнює $n - k$;
6. вага багаточлена (кількість ненульових коефіцієнтів) повинна бути не менш необхідної кодової відстані d_{min} ;

Послідовність дій по утворенню комбінацій систематичного ЦК така:

1. За вимогами до спроможності коду виявляти й виправляти помилки, а також довжиною його інформаційної частини « k » вибирається відповідний багаточлен $P(x)$ ступеня « μ ». Далі інформаційний багаточлен $G(x)$ множиться на одночлен x^μ . У двійковому поданні ця дія є приписуванням « μ » нулів праворуч до інформаційної частини $G(x)$.

2. Добуток $G(x) \cdot x^\mu$ ділиться на $P(x)$. У результаті виникає ціла $Q(x)$ (багаточлен того самого ступеню, що $G(x)$) й дробова $\frac{R(x)}{P(x)}$ складові частини:

$$\frac{G(x) \cdot x^\mu}{P(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{P(x)}. \quad (2.63)$$

3. Вираз (2.63) приводиться до спільного знаменника й перегрупується з урахуванням того, що додавання й віднімання в полі за модулем 2 еквівалентні

$$Q(x) \cdot P(x) = G(x) \cdot x^\mu + R(x). \quad (2.64)$$

Згідно наведеної вище теореми тут у лівій частині міститься багаточлен циклічного коду, а отже у правій частині – також, але зі структурою систематичного коду – до багаточлена $G(x) \cdot x^\mu$ ступеня не менш μ і не більше $n-1$ додані члени ступеня не більш $\mu-1$ так званої остачі $R(x)$. У двійковому ж поданні на місце μ нулів у добутку $G(x) \cdot x^\mu$ приписується код остачі $R(x)$, що не може мати довжину більше μ .

2.10.3. Матричний метод побудови систематичного ЦК

З урахуванням того, що операції множення й ділення в поле за модулем 2 є лінійними, матричний метод побудови коду, докладно викладений в п. 2.9, може бути застосований і до циклічного коду. Відміною є те, що контрольні частини твірної матриці $F_{(n,k)}$, одержуються у вигляді залишків $R(x)$:

$$F_{(n,k)} = \left| G_{(k,k)}, R(x)_{(k,\mu)} \right|. \quad (2.65)$$

Пояснимо викладене вище на наступному прикладі. Якщо взяти $k=4$ й зажадати, щоб код мав $d_{\min} = 3$, то в якості $P(x)$ може бути використаний один з багаточленів третього ступеня в розкладанні бінома

$$x^n + 1 = x^7 + 1 = (x + 1) \cdot (x^3 + x + 1) \cdot (x^3 + x^2 + 1). \quad (2.66)$$

Співмножники розкладання (2.66) є незвідними.

Отже, тут довжина ЦК становитиме $n = k + \mu = 4 + 3 = 7$. Виконаємо дії методики 2.10.2, виходячи з того, що вони застосовуються для рядків інформаційної підматриці $G_{(4,4)}$. В алгебраїчній формі результатом їх множення на x^μ буде вектор одночленів

$$G_{(4,4)} \cdot x^3 = \begin{vmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{vmatrix} \cdot x^3 = \begin{vmatrix} x^3 \\ x^4 \\ x^5 \\ x^6 \end{vmatrix}, \quad (2.67)$$

або у двійковій формі – матриця

$$G_{(4,4)} \cdot x^3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (2.68)$$

Далі обчислюються залишки для рядків твірної матриці $F_{(7,4)}$. У якості $P(x)$ виберемо другий співмножник в (2.66), $P(x) = x^3 + x + 1$.

Тоді в першому рядку $G_{(7,4)}$ остача $R(x)$ визначиться як:

$$\oplus \begin{array}{l} x^3 \quad | \quad x^3 + x + 1 \\ \hline x^3 + x + 1 | \quad 1 \\ \hline x + 1, \text{ або } R(x)_1 = 011, \end{array}$$

а в четвертому

$$\oplus \begin{array}{l} x^6 \quad | \quad x^3 + x + 1 \\ \hline x^6 + x^4 + x^3 | \quad x^3 + x + 1 \\ \hline x^4 + x^3 \\ \oplus \quad \hline x^4 + x^2 + x \\ \hline x^3 + x^2 + x \\ \oplus \quad \hline x^3 + x + 1 \\ \hline x^2 + 1, \quad R(x)_4 = 101. \end{array}$$

Зручніше залишки обчислювати за «один прохід» двійковим діленням

останнього рядка матриці (2.68) на двійковий еквівалент $P(x) - 1011$:

$$\begin{array}{r}
 \oplus \begin{array}{r} 1000000 \\ \underline{1011} \\ 011 \end{array} \quad \begin{array}{l} |1011 \\ |1011 \\ R(x)_1 \end{array} \\
 \quad \begin{array}{r} 110 \\ \underline{1100} \\ 1011 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{не ділиться на } P(x), R(x)_2 \\ \\ R(x)_3 \end{array} \\
 \oplus \begin{array}{r} 1110 \\ \underline{1011} \\ 101 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ R(x)_4 \end{array}
 \end{array}$$

Порівняння варіантів визначення залишків у двійковій і у формі багаточленів показує збіг їхніх результатів. Остаточна твірна матриця ЦК має вигляд

$$F_{(7,4)} = \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \right). \quad (2.69)$$

Вимоги до її контрольної підматриці такі самі, як і для твірної матриці ЛСК – число одиниць у $R(x)$ рядку повинно бути не менш ніж $d_{\min} - 1$, а в порозрядній сумі за модулем 2 двох будь-яких рядків – не менш $d_{\min} - 2$. Відзначимо, що різним інформаційним частинам коду можуть відповідати однакові контрольні.

Усього даний ЦК має 15 ненульових комбінацій, які одержують аналогічно, як і для ЛСК $G_{(7,4)}$.

2.10.4. Властивості найпростіших ЦК з виявлення помилок і вибір необхідного твірного багаточлена

З викладеного вище випливає очевидний висновок про ознаку наявності в кодовій комбінації помилок кратності не більше тієї, на яку розрахований код – багаточлен перекрученої комбінації на твірний багаточлен ділиться з остачею.

Як і для ЛСК уведемо поняття вектора (багаточлена) помилок, що порозрядно підсумовується з багаточленом вихідної комбінації цього ЦК. У силу лінійності операцій над багаточленами ЦК (як і ЛСК) ознакою помилок

буде те, що багаточлен помилок V_{II} на твірний багаточлен не ділиться без остачі.

Звідси впливають висновки про виявлення помилок у ЦК, які породжуються найпростішими багаточленами $P(x)$:

1. ЦК із твірним багаточленом $P(x)$, що має у своєму складі більше одного члена, виявляє всі поодинокі помилки. Доказ цього елементарний – одночлен V_{II} на багаточлен $P(x)$ без остачі поділити неможливо.

2. ЦК із твірним багаточленом $P(x) = x + 1$ виявляє всі помилки непарної кратності.

Покажемо, що в комбінаціях даного ЦК завжди є парне число членів, а V_{II} з непарним числом членів, як наслідок, на двочлен $P(x) = x + 1$ без остачі поділити неможливо.

У розглянутому випадку багаточлен циклічного коду є добутком

$$F(x) = Q(x) \cdot (x + 1) = Q(x) \cdot x + Q(x). \quad (2.70)$$

У цій сумі є $2p$ членів, з яких $2p_1$ з однаковими ступенями при порозрядному додаванні обернуться в нулі, тому в багаточлені ЦК буде $2p - 2p_1$ – парне число членів. Таким чином, висловлене твердження доведене.

3. ЦК виявляє будь-яку поодинокую або подвійну помилку, якщо довжина коду $n \leq l$, де l – найменше число, при якому біном $x^l + 1$ ділиться на утворюючий багаточлен $P(x)$ даного коду без остачі.

Виявлення поодинокій помилки забезпечується тим, що тут $P(x)$ буде багаточленом. Двочлен помилок запишемо у вигляді

$$V_{II} = x^i + x^j = x^j (x^{i-j} + 1), \quad (2.71)$$

$j < i \leq n$, отже $(i - j) < n \leq l$, двочлен помилки $x^{i-j} + 1$ на $P(x)$ без остачі не поділиться й подвійна помилка буде виявлена.

За умовою Хеммінга (2.42) найбільш економічним при $d_{\min} = 3$ буде код, у якого число контрольних розрядів і довжина зв'язані співвідношенням $n = 2^\mu - 1$ або в нашому випадку $l = 2^\mu - 1$.

При цьому, в розкладанні бінома $x^l + 1 = x^{2^\mu - 1} + 1$ буде хоча б один незвідний багаточлен ступеня μ , який забезпечує виявлення будь-якої поодинокій або подвійної помилки. У загальному випадку біном $x^{2^\mu - 1} + 1$ є найменшим загальним кратним для усіх незвідних багаточленів $P(x)$ ступеня μ .

4. ЦК, у якого твірний багаточлен має вигляд

$$P(x) = (x+1) \cdot P'(x), \quad (2.72)$$

виявляє будь-яку поодинокую або подвійну, або потрійну помилку, якщо ступінь незвідного багаточлена $P'(x)$ такий, що виконується умова $2^\mu - 1 \geq n$.

Співмножник $P(x)$, $x+1$ забезпечує виявлення поодинокі або потрійної помилок, а $P'(x)$ – подвійної.

5. ЦК, у якого твірний багаточлен $P(x)$ має ступінь μ , виявляє пакет (групу) помилок довжиною $b \leq \mu$ в будь-якій частині кодової комбінації.

Пакети помилок можуть виглядати у такий спосіб, як це показано на рис. 2.9.

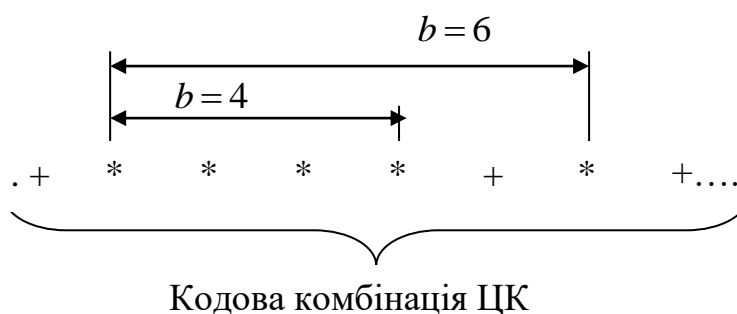


Рис. 2.9

Пакет помилок починається й закінчується перекрученим розрядом коду, відзначеним як «*»; усередині пакета можуть перебувати неспотворені розряди «+».

Багаточлен пакетної помилки має вигляд $V_{II} = x^i + \dots + x^\gamma + \dots + x^j$, і якщо $i > \gamma > j$, то

$$V_{II} = x^j \cdot (x^{i-j} + \dots + x^{\gamma-j} + \dots + 1). \quad (2.73)$$

Оскільки $i - j = b - 1$, багаточлен у дужках у виразі (2.73) на $P(x)$ ступені μ без остачі не ділиться й групова помилка виявляється.

Викладені положення про спроможність ЦК до виявлення помилок дозволяють вирішити питання вибору необхідного твірного $P(x)$ багаточлена в низці практичних застосувань. Так, у системах передачі технологічної інформації й даних широко використовується код CRC-16 (cyclical redundancy check), циклічний надлишковий код з твірним багаточленом

$$P(x) = x^{16} + x^{12} + x^5 + 1 = (x+1) \cdot (x^{15} + x^{14} + x^{13} + x^{12} + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1). \quad (2.74)$$

Співмножник п'ятнадцятого ступеня в (2.74) – незвідний багаточлен, тому відповідний ЦК по властивості 4 виявляє будь-яку поодинокую або

подвійну, або потрійну помилку в будь-якій частині кодової комбінації, або групову помилку з довжиною $b \leq 16$, якщо довжина коду $n \leq 2^{15} - 1 = 32767$.

Додаткове збільшення спроможності до виявлення помилок досягається шляхом двоступінчастого кодування при передачі в одному інформаційному блоці декількох повідомлень, таких як адреса одержувача, вид операції (функціональна адреса), цифрові дані тощо. При цьому частини блоку спочатку кодуються, наприклад, інверсним кодом, а потім отримана складена кодова комбінація захищається циклічним кодом, зокрема CRC-16.

Така структура ЦК використовується для телеуправління й телесигналізації в технологічних процесах електроенергетики, нафтохімії й інших, пов'язаних з підвищеною небезпекою наслідків помилок при контролі та керуванні.

При декодуванні на відсутність помилок послідовно перевіряються згадані частини блоку, а якщо в них помилки не виявлені, то й блок у цілому.

При виявленні помилок приймач передає джерелу коротке повідомлення «помилка», і останній повторює забраковане повідомлення. Такий спосіб підвищення вірогідності передачі інформації називається переопитуванням або вирішальним зворотним зв'язком. Він одержав практично виняткове поширення в системах телемеханіки й локальних системах передачі даних.

Крім розглянутих найпростіших, розроблена множина ЦК, що мають особливі коригувальні властивості – коди Файра, які виправляють пакети помилок, коди Боуза – Чоудхурі – Хоквінгема (БЧХ), для яких характерні добре розроблена методика побудови й спроможність виправляти помилки будь-якої кратності, недвійкові коди Рида – Соломона (КРС), які використовуються у високошвидкісних магістральних каналах зв'язку та ін.

2.10.5. Виправлення помилок у ЦК

2.10.5.1. Метод синдромів

Метод може бути застосований для виправлення однократних помилок і використовує підхід, аналогічний тому, що був розглянутий в методі синдромів стосовно ЛСК (див. п. 2.9.3.2). Тут синдромами виступають залишки від ділення одночленів помилок V_{II} на $P(x)$. Таке ділення зручно виконати у двійковій формі. Для коду $F_{(7,4)}$ з твірною матрицею (2.69) нижче наведена таблиця синдромів 2.8, відповідно до якої може бути виправлена поодинокі помилка, як в інформаційній, так і контрольній частинах.

Таблиця 2.8

V_{II}	1000000	0100000	0010000	0001000	0000100	0000010	0000001
S_{II}	101	111	110	011	100	010	001

Так, наприклад, прийнята кодова комбінація $F'(x)=1011101$ ЦК з $P(x)=1011$. Ділення $F'(x)$ на $P(x)$ дає

$$\oplus \begin{array}{r|l} 1011101 & \underline{1011} \\ 1011 & \underline{} \\ \hline & 101. \end{array}$$

Відповідно до залишку 101 за допомогою табл. 2.8 визначається $V_{II} = 1000000$ й виправлена комбінація коду становитиме

$$F(x) = F'(x) + V_{II} = 1011101 \oplus 1000000 = 0011101.$$

2.10.5.2. Узагальнений алгоритм виправлення помилок

Поставлена задача корекції помилок ефективно вирішується з використанням наступного алгоритму, який включає такі кроки:

1. Як і в задачі виявлення помилок, прийнята кодова комбінація $F'(x)$ ділиться на $P(x)$. Якщо залишок $R(x)=0$, то кодова комбінація прийнята вірно. У іншому випадку підраховується вага залишку w (число одиниць у двійковому коді $R(x)$), яка порівнюється з числом помилок, що s виправляються кодом.

2. Якщо $w \leq s$, то обчислюється порозрядна сума за модулем 2 $F'(x) + R(x)$, котра й буде виправленою комбінацією коду повідомлення $F(x)$.

3. Якщо $w > s$, здійснюється циклічний зсув $F'(x)$ вліво на один розряд, отримана кодова комбінація $F'(x)_1$ ділиться на $P(x)$ з обчисленням ваги w_1 остачі $R(x)_1$ й порівнюється з параметром s . У випадку, якщо $w_1 \leq s$ обчислюється аналогічно п. 2 сума $F'(x)_1 + R(x)_1$, отримана кодова комбінація циклічно зсувається вправо на один розряд і в результаті одержується виправлений код повідомлення.

4. Якщо після першого зсуву вага остачі $w_1 > s$, здійснюється наступний зсув $F'(x)_1$ вліво, ділення $F'(x)_2$ на $P(x)$, визначення ваги залишку w_2 . При $w_2 > s$ цикл операцій зсуву, ділення, визначення й аналізу залишку повторюється доти, поки на черговому циклі « q » не буде досягнута умова $w_q \leq s$.

Обчислений у цьому циклі залишок підсумовується з діленням (як у п. 2), і кодова комбінація $F'(x)_q + R(x)_q$ суми піддається $(q-1)$ послідовним зсувам вправо, у результаті чого й визначається виправлений код повідомлення.

Як приклад виправимо помилку ($s=1$) в кодовій комбінації $F'(x)=1011101$, якщо $P(x)=x^3+x+1=1011$. Згідно алгоритму виконуються дії:

1. Ділення $F'(x)$ на $P(x)$

$$\oplus \begin{array}{r} 1011101 \overline{)1011} \\ 1011 \quad \overline{)1000} \end{array}$$

$$0000\mathbf{101} - R(x)_1 \Rightarrow w_1 = 2, w_1 > s.$$

2. Зсуву вліво $F'(x)$ й одержання $F'(x)_1 = 0111011$.

3. Ділення $F'(x)_1$ на $P(x)$

$$\oplus \begin{array}{r} 0111011 \overline{)1011} \\ 1011 \quad \overline{)0110} \end{array}$$

$$\oplus \begin{array}{r} 1011 \\ 1011 \end{array}$$

$$000000\mathbf{1} - R(x)_2 \Rightarrow w_2 = 1, w_2 = s.$$

4. Обчислення суми

$$F'(x)_2 = F'(x)_1 + R(x)_2 = 0111011 \oplus 0000001 = 0111010.$$

5. Зсуву $F'(x)_2$ на $q-1=2-1=1$ розряд вправо й одержання виправленого коду повідомлення $F(x) = 0011101$.

6. Перевірки правильності обчислень діленням $F(x)$ на $P(x)$

$$\oplus \begin{array}{r} 0011101 \overline{)1011} \\ 1011 \quad \overline{)0011} \end{array}$$

$$\oplus \begin{array}{r} 1011 \\ 1011 \end{array}$$

$$0 \Rightarrow F(x) \text{ не містить помилку.}$$

Відомі й інші методи виправлення помилок, зокрема мажоритарний та ін.

2.10.6. Згорткові коди (ЗК)

Ці коди також є лінійними, оскільки послідовність елементів на виході пристрою кодування (ПК) є результатом підсумовування за модулем 2 елементів вхідної послідовності.

ПК ЗК є кінцевим автоматом, у якого поточний набір вихідних сигналів визначається як множиною поточних, так і попередніх вхідних. Основою такого ПК є K – розрядний регістр зсуву RG і n суматорів за модулем 2. Схема найпростішого ПК зображена на рис. 2.10. У прикладі, що розглядається, $K = 3$, $n = 2$ (суматор, що відповідає положенню I перемикача П є виродженим). По тактах завантаження, що слідують з частотою f_T , у RG формується чергова k – розрядна група елементів вхідної послідовності, по кожному з тактів за допомогою перемикача П здійснюється послідовне опитування всіх суматорів, у результаті чого на виході ПК з'являється група з n елементів вихідної послідовності. Число комірок RG K називається величиною кодового обмеження, а відношення $\frac{k}{n}$ – ступенем кодування.

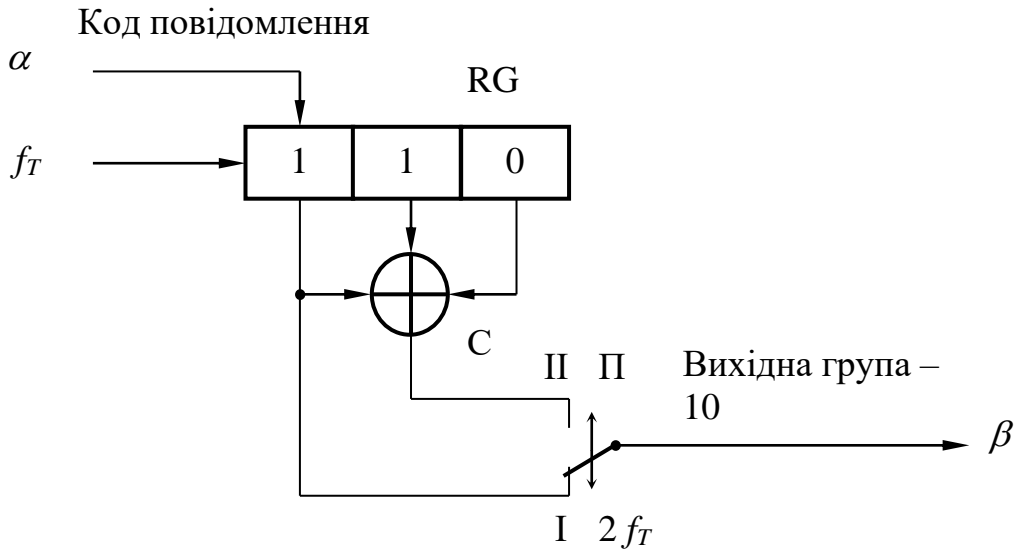


Рис 2.10

В найпростішому випадку $k=1$ і, для схеми, що розглядається, $\frac{k}{n} = \frac{1}{2}$.

Обов'язковою умовою для ПК ЗК є те, що структура зв'язків суматорів повинна давати інверсні вихідні групи при інверсії вхідного елемента.

Пам'ять ПК визначається його станами – умістом крайніх $K-1$ комірок RG (на рис. 2.10 вони розташовані ліворуч). При надходженні чергового вхідного елемента ПК може перейти лише в один із двох станів. На рис. 2.11 зображено граф кінцевого автомату ПК за рис. 2.10, який визначає його всілякі стани й переходи між ними. Суцільні стрілки відповідають черговому елементу вхідної послідовності 0, а штрихові – 1.

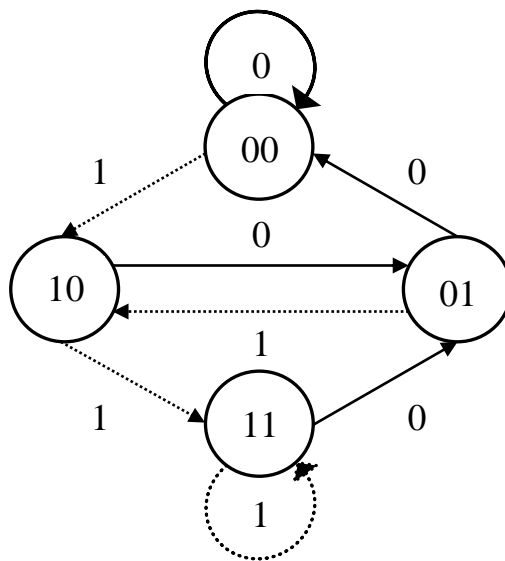


Рис. 2.11

Формування вихідної групи ЗК ілюструє рис. 2.10, де на поточному такті в RG записана поточна частина коду повідомлення 110, якій відповідає група ЗК 10. Співвідношення для елементів групи β_{ii} , β_{iii} і елементів вхідної послідовності α_i мають вигляд

$$\begin{cases} \beta_{ii} = \alpha_i \\ \beta_{iii} = \alpha_i \oplus \alpha_{i-1} \oplus \alpha_{i-2} \end{cases} \quad (2.75)$$

Зв'язки ПК можуть бути також описані у вигляді багаточленів фіктивної змінної.

Сигнали ПК в часовому вимірі, обумовленому тактами RG, описуються кодовими деревами й гратчастими діаграмами. Кодове дерево, що відповідає розглянутому прикладу, наведене на рис. 2.12.

Вертикальні гілки, спрямовані вгору, відповідають вхідному елементу ПК 0, а вниз – 1. Під кожною горизонтальною гілкою наведений стан RG на даному такті, а над гілкою – поточна група вихідної послідовності. З рис. 2.10 випливає, що після четвертого такту RG структура дерева стає регулярною. Так, коди гілок на четвертому такті при перегляді зверху вниз мають вигляд: 00-11-01-10-01-10-00-11, після чого послідовність кодів періодично повторюється. Аналогічна періодичність має місце й на всіх наступних тактах. У загальному випадку при нульовому початковому стані RG, регулярність дерева настає на $K+1$ -му такті.

Припустимо, що у вихідному стані RG обнулений і на вхід ПК надходить послідовність 01011. Після першого такту в RG буде записана комбінація 000, другого – 100, третього – 010, четвертого – 101, п'ятого – 110. Відповідно, вихідна послідовність буде: 0011011010.

Декодування комбінацій ЗК здійснюється тут групами по два елементи й залежно від того, у якому напрямку (вгору або вниз по кодовому дереву) відбувається перехід, встановлюється значення 0 або 1 поточного елемента повідомлення.

ЗК призначені для виправлення помилок, при цьому їхня ефективність є однією з найвищих серед коригувальних кодів, які використовуються в СПП. Це досягається як за рахунок великої надлишковості, так і за рахунок удосконалювання алгоритмів кодування й декодування.

У розглянутому найпростішому коді виправлення поодинокі помилки пояснюється наступним прикладом за рис. 2.12. Для наведеної вихідної послідовності виникає помилка в групі 01 на такті 3 таким чином, що вона приймає вигляд 11. Розгалуження на цьому такті кодового дерева дає групи 01 і 10, що не збігаються з нею. Якби параметр n був би більший за 2, то поодинокі помилку можна було б виправити за мінімумом відстані між перекрученою й дозволеними кодовими комбінаціями. У нашій випадку помилка може бути виправлена при відсутності помилок у наступній групі

послідовності, що декодується, яка на такті 4 приймає значення 10 і виходить із гілки 01 такту 3. Отже, помилкова група 11 повинна бути виправлена на 01.

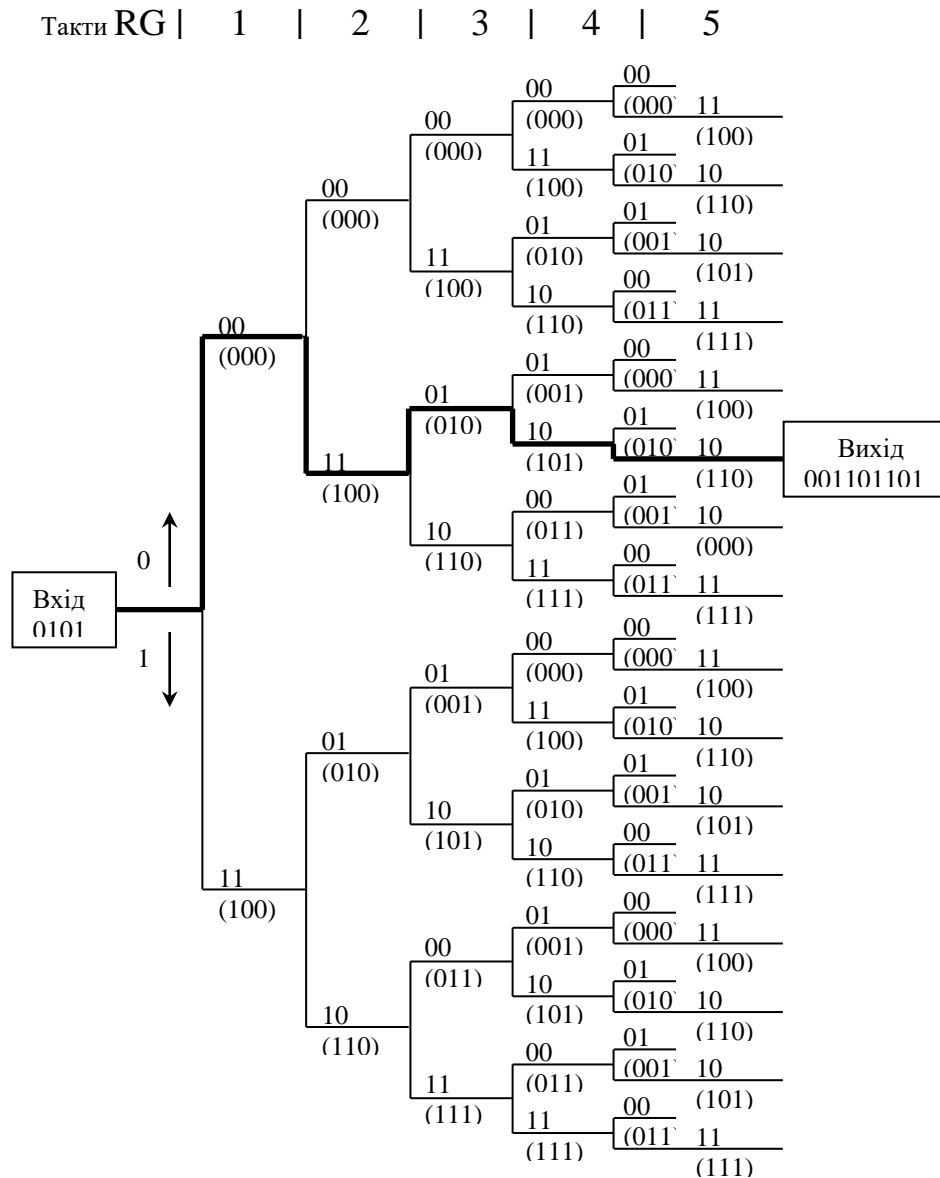


Рис. 2.12

В 1967 р. Ендрю Віттербі розробив алгоритм декодування ЗК, що є оптимальним за виправною спроможністю. Певний час його реалізація була обмежена складністю апаратної частини декодера, і тільки після появи мікро-ЕОМ високої швидкодії ЗК почали будуватися на їхній основі.

У цей час у СПІ знайшли застосування кодери-декодери (кодеки) ЗК із довжиною кодового обмеження до 10 і ступенем кодування $\frac{1}{2}$ й $\frac{1}{3}$.

2.10.7. Канальне кодування

Метою канального кодування є максимально ефективно використання

властивостей каналів зв'язку в процесах відображення елементів кодів повідомлень на сигнали, а також забезпечення функціонування власно каналоутворюючої апаратури. В деяких літературних джерелах до каналних кодів відносяться всі перешкодостійкі коди.

2.10.7.1. Гратчасті коди (ГК)

Ці коди забезпечують збільшення інформаційного навантаження на сигнал так, що він відображає не один елемент повідомлення, а декілька. Для цих цілей у локальних системах передачі даних на основі електричних ліній зв'язку поширення одержало використання частотних сигналів. Кожний з таких сигналів може мати кілька значень амплітуди і фази відносно опорного коливання. Процес утворення таких сигналів зветься квадратурною амплітудною маніпуляцією (КАМ). Прикладом може служити КАМ-16, застосована в протоколі V.29 для максимальної швидкості передачі повідомлень 9600 с^{-1} . Гратчаста діаграма КАМ-16 наведена на рис. 2.13.

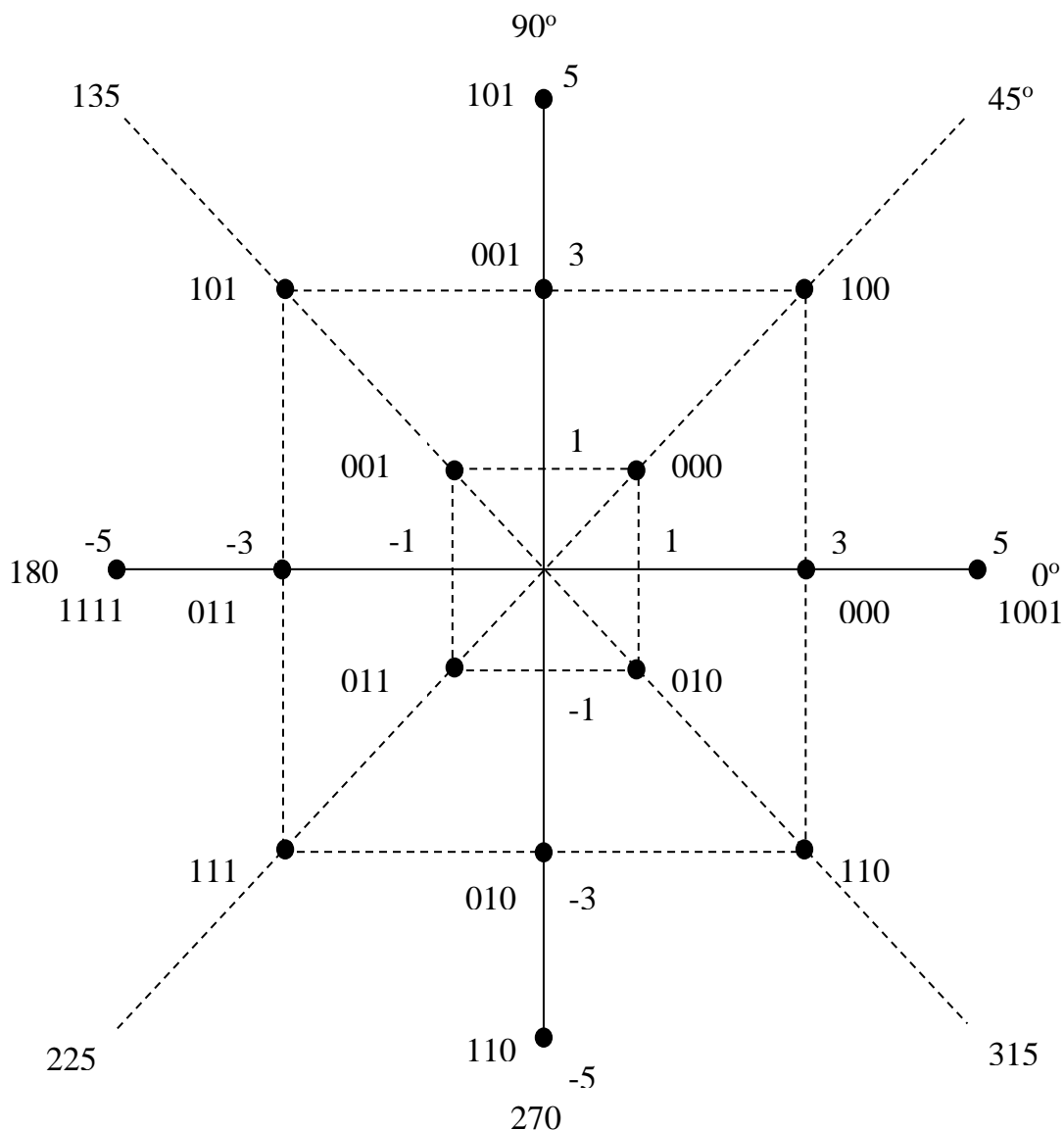


Рис. 2.13

Кожний з 16-ти сигналів тут являє собою комбінацію одного з 8-ми значень його фази та одного з 2-х значень амплітуди. Кожний з таких сигналів відображає свою чотирирозрядну комбінацію двійкових елементів послідовності коду повідомлення. Слід зазначити, що сусіднім крапкам в радіальному напрямку на діаграмі ґрат присвоюються коди Грея, які відрізняються друг від друга лише в одному розряді. Це дозволяє зменшити число помилок у прийнятій кодовій комбінації при змінах фази або амплітуди сигналу під впливом перешкод.

Співвідношення амплітуд сигналів на тому самому, а також на сусідніх векторах ґрат задані таким чином, щоб різниці енергій «сусідніх» сигналів були близькими між собою, що забезпечує максимальну вірогідність передачі повідомлень по симетричних каналах зв'язку.

Зауважимо, що в міру збільшення швидкості передачі за протоколами V.34, V.36, V.90 структури ґК істотно ускладнюються. Слід також зазначити, що при погіршенні якості каналу зв'язку – збільшенні частоти виникнення помилок, протоколи передбачають перехід на більш розріджені ґрати й меншу швидкість передачі повідомлень. Для згаданого протоколу V.29 швидкість передачі знижується до 4800 с⁻¹.

2.10.7.2. Шумові коди (ШК)

Ці коди одержали популярність у другій половині минулого століття як засіб захисту від несанкціонованого доступу до інформації і в криптографії одержали назву шифрів гамування. Однак при цьому виявилася й інша якість цих кодів – підвищена перешкодостійкість, як при зосередженій, так і розподіленій по смузі частот каналу перешкоді. Ця якість корисна при застосуванні силових ліній електропостачання як каналів зв'язку. На гірничо-металургійних виробництвах споживачами електроенергії можуть виступати: електроприводи з імпульсним регулюванням – видобувних комбайнів, конвеєрів і вентиляційних установок; дугові печі, зварювальні апарати, які у свою чергу є джерелами інтенсивних перешкод у широкому спектрі частот. ШК знайшли застосування в системах цифрового сотового зв'язку CDMA.

Основою ШК є псевдовипадкові двійкові послідовності (ПВП), у яких при досить великих періодах повторення практично досягається рівномірність і взаємозалежність появи нулів і одиниць. Найбільш відомими є M-послідовності Хаффмана й Гордона – Мілза – Уолша (GMW). M-послідовності (послідовності максимальної довжини) утворюються рекурентними сумами за модулем 2 самих елементів послідовності. Довжина M-послідовності (період повторення) становить

$$N = 2^n - 1, \quad (2.76)$$

де n – натуральне число, яке визначає довжину початкової фази ПВП. Початковою фазою може виступати будь-яка ненульова n -розрядна двійкова

комбінація $\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, оскільки нульова комбінація з використанням будь-яких рекурентних сум за модулем 2 породжуватиме нульову. Структура рекурентних рівнянь пов'язана з поліноміальним поданням незвідних багаточленів, що є твірними для ЦК. Рекурентні суми завжди мають парну кількість доданків.

Саме рекурентний характер зв'язків значень елементів ПВП обумовлює її періодичність. Довжина M -послідовності N визначає загальну кількість ненульових n -розрядних двійкових комбінацій. Оскільки наступний елемент ПВП формується виключно на основі комбінації з n попередніх, то через N кроків ця комбінація мусить повторитися, що викличе циклічне повторення всієї подальшої послідовності.

Твірні багаточлени ПВП мають бути не тільки незвідними, але й примітивними (додаток 1). Примітивний двійковий багаточлен порядку n має бути не тільки дільником багаточлена $x^{2^n-1}+1$ (п. 2.10.2), але й не бути дільником будь-якого багаточлена x^d+1 , де d є дільником числа 2^n-1 .

Покажемо, що багаточлен x^2+x+1 є примітивним. Число 2^n-1 у прикладі складає 3, є простим і не має дільників, тобто будь-який незвідний багаточлен порядку 2 є примітивним. З іншого боку, багаточлен, що розглядається, є дільником багаточлену x^3+1 і задовольняє умові незвідності:

$$\begin{array}{r} \oplus 1001 \underline{111} \\ \underline{111} | 11 \\ \oplus 111 \\ \underline{111} \\ 0 \end{array}$$

З використанням довільного примітивного багаточлена, n -го $P(x)$ ступеня може бути породжена псевдовипадкова двійкова послідовність, співвідношення для i -го члена α_i якої має вигляд

$$\begin{aligned} P(x) &= x^n + \dots + x^j + \dots + x^k + 1; \\ \alpha_i &= \alpha_{i-n} \oplus \dots \oplus \alpha_{i-j} \oplus \dots \oplus \alpha_{i-k} \text{ при } i > n. \end{aligned} \tag{2.77}$$

Тут j – ступінь довільного члена, коефіцієнт якого дорівнює одиниці, k – ненульовий ступінь останнього молодшого члена, коефіцієнт якого дорівнює одиниці.

Так, для $n=3$ твірному багаточлену $P(x) = x^3 + x + 1$ відповідає сума $\alpha_i = \alpha_{i-3} \oplus \alpha_{i-1}$. Період ПВП становить $N = 2^3 - 1 = 7$. Для початкової фази 101 період ПВП буде мати вигляд: 1010011.

Для того, щоб ПВП була максимально близькою до істинно випадкової, повинні виконуватися наступні умови:

1. Урівноваженості. Кількість одиниць у періоді ПВП повинна на одиницю перевищувати кількість нулів.

2. Групування. Половина сегментів послідовності повинна зображувати чергування нулів та одиниць: 01 і 10, четверта частина – пар нулів і одиниць: 00 і 11; восьма – їхніх трійок: 000 і 111 і т.д.

3. Кореляції. Дискретна автокореляційна функція (АКФ) на періоді ПВП має єдиний максимум при нульовому зсуві $R(0) = 1$ й $R(i) = -\frac{1}{N}$ для будь-яких інших величин зсувів i .

Пояснимо останню властивість на прикладі. Під АКФ $R(\tau)$ для функції дійсної змінної $f(t)$, що має період T_n , мається на увазі величина

$$R(\tau) = \frac{1}{T_n} \int_{-\frac{T_n}{2}}^{\frac{T_n}{2}} f(t)f(t+\tau)dt. \quad (2.78)$$

Нормована на максимум АКФ має вигляд

$$\bar{R}(\tau) = \frac{\int_{-\frac{T_n}{2}}^{\frac{T_n}{2}} f(t)f(t+\tau)dt}{\int_{-\frac{T_n}{2}}^{\frac{T_n}{2}} f^2(t)dt} \quad (2.79)$$

і характеризує інтегральну на періоді ступінь зв'язку (корельованість) поточного значення функції зі значенням, що віддалене від нього з часовим лагом τ .

Якщо функція $f(t)$ описує двійкову послідовність, де нулю відповідає значення функції -1, а одиниці – +1, вираз (2.78) може бути спрощений і дискретна АКФ прийме вигляд

$$R(i) = \frac{N_C - N_{HC}}{N}, \quad (2.80)$$

де N_C , N_{HC} – кількість елементів, що збігаються та не збігаються у вихідній і зсунутій відносно неї на i кроків ПВП.

Порівняємо період розглянутої вище ПВП із самим собою. У цьому випадку $N_C = N = 7$, $N_{HC} = 0$ і, отже $R(0) = 1$. Якщо здійснити будь-який зсув періоду ПВП, наприклад, на $i = 2$ елемента, послідовність прийме вигляд: 1110100. Її порозрядне порівняння з вихідною послідовністю 1010011 дає

значення $N_C = 3$, $N_{HC} = 4$ і, отже $R(i) = -\frac{1}{7}$. Полігон цієї АКФ наведений на рис. 2.14.

Вимога наявності єдиного максимуму АКФ на періоді необхідна для забезпечення незалежності роботи ряду каналів зв'язку, у яких шумові сигнали формуються на основі одного твірного багаточлена, але з різними початковими фазами. Лише примітивні твірні багаточлені задовольняють цій вимозі.

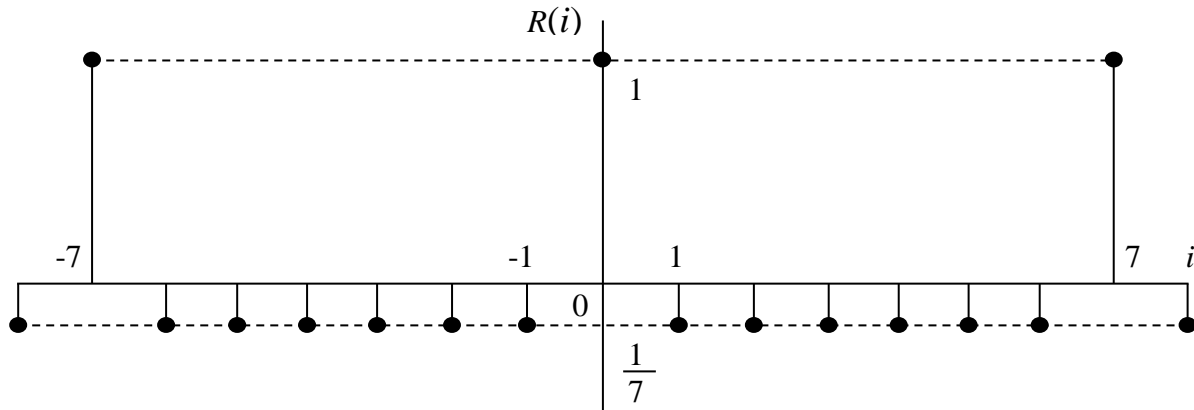


Рис. 2.14

В найпростішому варіанті процес кодування ШК полягає в накладанні на інформаційну бітову послідовність α ПВП ξ шляхом підсумовування за модулем 2 відповідних бітів інформаційної послідовності та ПВП. Процес декодування є цілком аналогічним. Якщо при кодуванні і декодуванні використовується одна і та сама ПВП з однією початковою фазою, на виході декодера при відсутності помилок отримується інформаційна послідовність γ , що збігається з первинною

$$\gamma_i = \xi_i \oplus (\xi_i \oplus \alpha_i) = (\xi_i \oplus \xi_i) \oplus \alpha_i = 0 \oplus \alpha_i = \alpha_i. \quad (2.81)$$

Покажемо, що побітове підсумовування за модулем 2 двійкової послідовності з довільною імовірністю появи нулів p та ПВП з рівноймовірною появою нулів та одиниць дає також послідовність з рівноймовірною появою нулів та одиниць. За формулою повної імовірності, імовірність появи нуля у послідовності, що розглядається, становитиме

$$0,5p + 0,5(1 - p) = 0,5. \quad (2.82)$$

Таким чином, кодована за допомогою ШК інформаційна послідовність набуває властивість урівноваженості ПВП.

2.10.7.3. Скремблерування даних

При послідовній передачі елементів кодів повідомлень виникає завдання

синхронізації роботи приймача (Пр) з передавачем (Пд) СПП. Процес передачі-прийому здійснюється за тактами (часовими інтервалами рівної тривалості), що задаються генераторами Пр та Пд. Синхронізація забезпечує прийом сигналів на тих самих тактах, на яких вони формуються. Підстроювання частоти тактового генератора Пр виконується за змінами сигналів кода повідомлення, які надходять з лінії зв'язку в моменти формування тактових імпульсів генератора Пд. Найкращі умови для підстроювання досягаються, коли з лінії зв'язку надходить послідовність нулів та одиниць, що чергуються. При суцільному потоці нулів або одиниць події, за якими здійснюється підналагодження тактової частоти Пр – моменти переходів $0 \rightarrow 1$ або $1 \rightarrow 0$, відсутні і виникає можливість помилкового приймання повідомлень.

Наближене до рівномірного чергування нулів та одиниць у потоці повідомлень досягається шляхом його скремблерування (перемішування) кодером. Вихідна послідовність кодера β формується шляхом додавання за модулем 2 поточного елемента вхідної послідовності α_i до деяких її попередніх елементів. На рис. 2.15 наведена структурна схема скремблера, у якого елемент вихідної послідовності кодера визначається як

$$\beta_i = \alpha_i \oplus (\alpha_{i-7} \oplus \alpha_{i-6}). \quad (2.83)$$

Сума у дужках відповідає елементу ПВП з твірним багаточленом $P(x) = x^7 + x^6 + 1$.

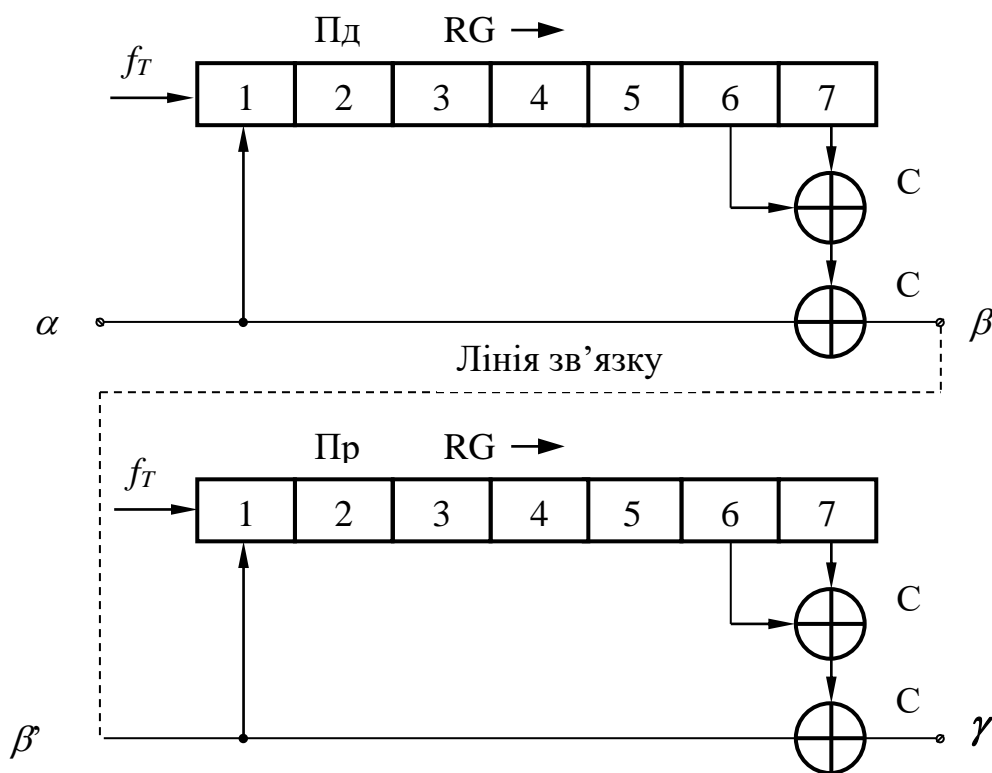


Рис. 2.15

На стороні Пр послідовність β' декодується скремблером таким самим, як і на стороні Пд. При відсутності помилок вихідна послідовність Пр збігається з первинною

$$\begin{aligned} \gamma_i &= \beta_i \oplus (\alpha_{i-7} \oplus \alpha_{i-6}) = (\alpha_i \oplus (\alpha_{i-7} \oplus \alpha_{i-6})) \oplus (\alpha_{i-7} \oplus \alpha_{i-6}) = \\ &= \alpha_i \oplus [(\alpha_{i-7} \oplus \alpha_{i-6}) \oplus (\alpha_{i-7} \oplus \alpha_{i-6})] = \alpha_i. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Якщо ж у послідовності β' наявні помилки, то на виході системи має місце їх розмноження. Так, у розглянутому прикладі, в послідовності γ помилка з'являється перший раз, коли вона надходить на вхід декодера і ще 2 рази, коли вона міститься у двох останніх комірках RG.

Другим недоліком скремблерування є неефективне розріджування послідовностей нулів та одиниць з довжиною, зрівняною з довжиною регістрів. Відома низка способів, які дозволяють усунути цей недолік. Найпростіший з них полягає у перекодуванні первинної послідовності α за кодом 4В/5В, що передбачає розбиття послідовності на четвірки елементів і заміну кожної із них п'ятіркою, в якій зустрічається не більше двох нулів поруч. Фрагмент кодової таблиці 4В/5В зображений в табл. 2.7.

Таблиця 2.7

4В	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111
5В	11110	01001	10100	10101	01010	01011	01110	01111
4В	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
5В	10010	10011	10110	10111	11010	11011	11100	11101

Решта п'ятибітових комбінацій 4В/5В використовуються для кодування службових повідомлень, або є забороненими.

При передачі двійкових елементів у каналі зв'язку різнополярними імпульсами постійного струму розрідження потоків однотипних елементів також зменшує середню складову лінійного сигналу, що поліпшує швидкодію такого каналу.

В загальному випадку вирішення питання синхронізації пов'язано з погіршенням перешкодостійкості та збільшенням надлишковості повідомлень.

Контрольні питання і завдання

1. Дайте визначення кодування.
2. Сформулюйте можливі цілі кодування повідомлень.
3. Поясніть різницю між поняттями кодування і зашифрування.
4. Поясніть, які критерії покладені в основу класифікації кодів.
5. Назвіть прояви надлишковості в перешкодостійких кодах.

6. Наведіть загальний вираз для надлишковості перешкодостійкого коду та його вигляд для двійкового систематичного коду.

7. Вкажіть межі зміни надлишковості коду. Наведіть характерні значення надлишковості для оптимальних, звичайних та перешкодостійких кодів.

8. Поясніть, за якої умови нерівномірний код без розділових елементів припускає однозначне декодування. Перевірте виконання цієї умови для кодових комбінацій $\{11, 10, 01, 001, 000\}$.

9. Комбінації нерівномірного двійкового коду становлять: $\{a, ba, bc, bba, bbb, bbc\}$. Наведіть значення основи коду m . Перевірте виконання нерівності Крафта – Макміллана.

10. Наведіть приклад кодової таблиці комбінації якої задовольняють нерівності Крафта – Макміллана, але є нероздільними.

11. Сформулюйте основну теорему кодування в каналах без перешкод та її наслідок.

12. Джерело дискретних повідомлень генерує незалежні повідомлення з імовірностями $\{0,5, 0,25, 0,125, 0,125\}$. Використовуючи основну теорему кодування в каналах без перешкод та її наслідок, знайдіть мінімальну середню довжину комбінації при кодуванні повідомлень джерела двійковим кодом та мінімальні довжини комбінацій, що відповідають кожному з повідомлень.

13. Викладіть алгоритм Хаффмана. Поясніть, за рахунок чого в даному коді відбувається зменшення середньої довжини кодової комбінації порівняно з рівномірними кодами.

14. Викладіть алгоритм Шеннона – Фено. Поясніть, чому варіант алгоритму, який передбачає впорядкування повідомлень за імовірностями виникнення, є наближеним.

15. Джерело дискретних повідомлень генерує незалежні повідомлення з імовірностями $\{0,5, 0,25, 0,125, 0,0625, 0,0625\}$. Побудуйте двійкові КШФ та КХ. Для отриманих кодів перевірте виконання нерівності Крафта – Макміллана.

16. Знайдіть середні довжини комбінацій та обрахуйте надлишковості кодів отриманих за попереднім завданням.

17. Виконайте завдання за п. 10, 11 для кодів з алфавітом $\{a, b, c\}$.

18. Поясніть, яким чином відбувається кодування повідомлень за допомогою число-імпульсного (унітарного) коду.

19. Наведіть твірну матрицю трирозрядного НДК та отримайте за її допомогою всі можливі кодові комбінації.

20. Отримайте співвідношення для обчислення числа розрядів НДК n достатніх для кодування N первинних повідомлень.

21. Наведіть співвідношення для загальної кількості комбінацій n -розрядного двійкового коду. Доведіть, що воно відповідає кількості ненульових комбінацій НДК, які можуть бути отримані за допомогою порозрядного підсумовування за модулем 2 можливих сполучень рядків твірної матриці.

22. Наведіть формули переходів між значеннями розрядів НДК та КГ.

23. Побудуйте таблиці НДК та КГ для 16-ти повідомлень.

24. Поясніть яким чином КГ дозволяє у деяких випадках, зокрема при кодуванні циклічно змінюючихся величин, зменшити порівняно з НДК середнє значення модуля похибки, яка виникає при викривлені розрядів коду під дією перешкоди

25. Наведіть у ДДК рік власного народження.

26. Знайдіть кодову відстань та надлишковість коду з дозволеними комбінаціями $\{aaa, bab, bba, abb, cac, cca, acc\}$.

27. Сформулюйте загальні умови існування кодів, які виявляють або виправляють помилки заданої кратності.

28. Наведіть загальне співвідношення між кратностями помилок, які виявляються r та виправляються s кодом та його кодовою відстанню d_{\min} . Розгляньте часткові випадки для кодів, які тільки виявляють, або виправляють усі виявлені помилки.

29. Отримайте значення кратностей помилок, які виявляються r та виправляються s кодами з кодовими відстанями $d_{\min} = 1 \div 5$.

30. Наведіть заборонені значення тетрад ДДК та знайдіть надлишковість ДДК, що містить три тетради.

31. Дайте визначення ефективності коду щодо виявлення помилок. Отримайте вираз для ефективності коду «пар».

32. Наведіть дозвалені комбінації трирозрядного коду «пар», знайдіть його надлишковість.

33. Наведіть дозвалені комбінації коду C_5^2 , знайдіть його надлишковість.

34. Поясніть принципи побудови кодів: «пар», КК, ІК, КБ. Закодуйте за їх допомогою комбінацію інформаційних розрядів 111000.

35. Наведіть співвідношення для обчислення числа контрольних розрядів μ систематичних кодів при $d_{\min} = 3$ та обґрунтуйте його. Побудуйте таблицю значень загальної довжини кодової комбінації таких кодів n при кількості інформаційних розрядів $k = 2 \div 5$.

36. Вважаючи, що систематичний код використовується для кодування 7-ми повідомлень, імовірність перекручення розряду двійкового коду становить $p = 10^{-3}$, кратність помилок у кодовій комбінації підпорядковується розподілу Бернуллі, а припустима імовірність невиявлення помилок у комбінації складає $p_H = 10^{-10}$, визначте: максимальну кратність помилок, яку повинен виявляти код, його кодову відстань, кількість контрольних розрядів та довжину кодової комбінації.

37. Назвіть властивості твірної матриці ЛСК.

38. Вкажіть розміри підматриць перевірної $M_{(n,\mu)}$ та твірної матриці ЛСК $G_{(n,k)}$ і опишіть їх зміст.

39. Поясніть, як з перевірних співвідношень ЛСК отримуються: перевірна $M_{(n,\mu)}$, твірної матриця $G_{(n,k)}$ і всі ненульові кодові комбінації.

40. Для ЛСК $G_{(7,4)}$ значення контрольних розрядів обчислюються за допомогою співвідношень

$$\begin{cases} y_1 = x_2 \oplus x_3 \oplus x_4 \\ y_2 = x_1 \oplus x_3 \oplus x_4, \\ y_3 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_4 \end{cases}$$

запишіть перевірну та твірну матриці. Доведіть наявність принаймні однієї помилки у комбінації 1011101. Складіть таблицю синдромів однократних помилок. Використовуючи метод синдромів, виправте однократну помилку у комбінації 0111001.

41. Для ЛСК $G_{(6,3)}$, твірна матриця якого має вигляд

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix},$$

запишіть перевірні співвідношення. Знайдіть всі дозволені кодові комбінації. Виправте помилку у комбінації 101011 методом мажоритарного декодування.

42. Для коду Хеммінга з таблицею синдромів 2.7 і кодової комбінації 1100110 знайдіть значення всіх синдромів і визначте значення помилкового розряду.

43. Сформулюйте вимоги, яким задовольняють двійкові багаточлени.

44. Доведіть, що багаточлен $P(x) = x^3 + x^2 + 1$ є незвідним.

45. Сформулюйте вимоги, яким повинні задовольняють твірні багаточлени ЦК.

46. Сформулюйте основні властивості ЦК по виявленню помилок та їх зв'язок з виглядом твірного багаточлена.

47. З'ясуйте, правильно чи з помилками одержаний ЦК $G_{(7,4)}$ 1001011 з твірним багаточленом $P(x)=x^3+x^2+1$.

48. Використовуючи незвідний багаточлен $P(x)=x^3+x^2+1$, побудуйте твірну матрицю та знайдіть всі дозволені комбінації ЦК, за допомогою якого може здійснюватися кодування 7-ми повідомлень з виявленням усіх помилок максимальною кратністю 2.

49. Для ЦК $G_{(6,3)}$ з твірним багаточленом $P(x)=x^3+x^2+1$ складіть таблицю синдромів однократних помилок та за її допомогою виправте помилку у комбінації 011111.

50. З застосуванням узагальненого алгоритму виправіть помилку в ЦК $G_{(7,3)}$ 1010111 з твірним багаточленом $P(x)=x^4+x^2+x+1$.

51. Наведіть структурну схему ПК ЗК, для якого величина кодового обмеження складає $K=3$, ступінь кодування $-\frac{k}{n} = \frac{1}{2}$, а співвідношення для елементів групи β_{II} , β_{III} і елементів вхідної послідовності α_i мають вигляд:

$$\begin{cases} \beta_{II} = \alpha_i \oplus \alpha_{i-2} \\ \beta_{III} = \alpha_i \oplus \alpha_{i-1} \oplus \alpha_{i-2} \end{cases},$$

поясніть принцип функціонування пристрою.

52. Наведіть граф кінцевого автомату, що являє собою двійковий регістр зсуву з числом комірок $K=4$.

53. Сформулюйте мету каналного кодування.

54. Поясніть, за рахунок чого відбувається збільшення інформаційного навантаження на сигнал у ГК.

55. Наведіть ескіз фазоамплітудної діаграми ГК. Поясніть, які параметри сигналу відповідають координатам діаграми.

56. Поясніть, як відбувається формування ШК.

57. Поясніть, чим відрізняються незвідні та примітивні багаточлени.

58. Доведіть, що незвідний багаточлен $x^4+x^3+x^2+x+1$ не є примітивним.

59. Поясніть причину виникнення періодичності М-послідовності Хаффмана.

60. Сформулюйте умови, які висуваються до ПВП.

61. Поясніть, що характеризує АКФ, наведіть співвідношення для дискретної АКФ ПВП.

62. Поясніть, чим викликана вимога наявності єдиного максимуму АКФ ПВП на періоді при використанні ШК.

63. Доведіть, що кодована за допомогою ШК інформаційна послідовність набуває властивість урівноваженості ПВП.

64. Побудуйте період ПВП для початкової фази 110 і твірного багаточлену $P(x) = x^3 + x^2 + 1$.

65. Для фрагменту ПВП $\{\alpha_i\}_{i=5,\dots,8} = \{0, 1, 0, 1\}$ з твірним багаточленом $P(x) = x^4 + x + 1$ знайдіть вектор початкової фази $\vec{\alpha} = \{\alpha_i\}_{i=1,\dots,4}$.

66. Наведіть структурну схему пристрою скремблерування, що відповідає твірному багаточлену x^6+x+1 .

67. Поясніть мету використання коду 4В/5В.

3. ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ

Навчальні цілі: закріплення практичних навичок визначення інформативності дискретних та неперервних джерел повідомлень, пропускну́ї спроможності каналів зв'язку, синтезу оптимальних та перешкодостійких кодів.

3.1. Дослідження ентропії джерел дискретних і безперервних повідомлень

Об'єкт – джерела дискретних і безперервних повідомлень. Предмет – показники інформативності. Мета – експериментальне визначення.

Основні теоретичні відомості – викладені у п. 1.1 – 1.6.

Додаткові теоретичні відомості

Якщо випадковій події A з деякої множини подій можна поставити у відповідність деяке числове значення, то говорять що задано випадкову величину $X=X(A)$, яку можна розглядати як функціонал події.

Коли множина значень $\{x_i\}_{i=1,\dots,m}$, які може приймати випадкова величина, є зліченною (тобто значення можна пронумерувати натуральними числами), величина зветься дискретною, у протилежному – неперервною. Тут m – кінцева або нескінченна кількість нетотожних значень, які може приймати випадкова величина.

Залежності, що встановлюють зв'язок між можливими значеннями випадкової величини і імовірностями їхніх появ, називаються законами розподілу випадкової величини. До них відносяться диференціальний і кумулятивний (накопичений) розподіли. Стосовно неперервних величин вони також носять назви відповідно щільності імовірності й функції розподілу імовірності випадкової величини.

Функцією розподілу випадкової величини X називається залежність

$$F(x) = P(X \leq x), \quad (3.1)$$

де $P(X \leq x)$ – імовірність події, яка складається в тому, що випадкова величина X є не більшою значення x .

Зворотна до неї функція $x = F^{-1}(P)$ зветься інверсним кумулятивним розподілом випадкової величини.

Для дискретної випадкової величини кумулятивну функцію розподілу можна визначити як

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} p_i. \quad (3.2)$$

Диференціальний розподіл дискретної випадкові величини прийнято характеризувати множиною імовірностей $\{p_i\}_{i=1,\dots,m}$ прийняття випадковою

величиною X відповідно значень $\{x_i\}_{i=1,\dots,m}$. Графічні представлення диференціального й кумулятивного розподілів дискретної випадкової величини носять назви відповідно полігона й накопиченого полігона імовірностей.

Для неперервної випадкової величини диференціальний розподіл $w(x)$ можна визначити так:

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b w(x) dx. \quad (3.3)$$

Відповідно вираз для кумулятивного розподілу подається у вигляді

$$F(x) = \int_{-\infty}^x w(x) dx. \quad (3.4)$$

Співвідношення між диференціальним і кумулятивним розподілами неперервної випадкової величини записується так:

$$w(x) = \frac{dF(x)}{dx}. \quad (3.5)$$

Диференціальні й кумулятивні розподіли неперервної дискретної випадкової величини прийнято подавати за допомогою звичайних графіків.

Розглянуті вище закони розподілу випадкових величин, які визначаються на базі аналізу загальних закономірностей виникнення описуваних ними випадкових подій, носять назви теоретичних розподілів. Закони розподілу випадкових величин, які визначаються на основі досліду або експериментальним шляхом, носять назви емпіричних розподілів.

При проведенні досліду, метою якого є побудова емпіричного розподілу, із множини однорідних об'єктів, кожний з яких характеризується випадковою величиною (або сукупністю випадкових величин), здійснюється випадковий відбір об'єктів. Іншим варіантом досліду є проведення випробувань із випадковими наслідками, що характеризуються випадковою величиною. Уся множина об'єктів, з якої робиться вибірка, називається генеральною сукупністю, множина відібраних об'єктів – вибірковою сукупністю або вибіркою, а їхня кількість – об'ємом вибірки n .

Числа об'єктів $\{n_i\}_{i=1,\dots,m}$, для яких у вибірці дискретна випадкова величина X приймає відповідно значення $\{x_i\}_{i=1,\dots,m}$, називають частотами появи цих значень, а величини $w_i = \frac{n_i}{n}$ – відносними частотами. Відносні частоти $\{w_i\}_{i=1,\dots,m}$ є наближеннями відповідних імовірностей $\{p_i\}_{i=1,\dots,m}$,

причому $\lim_{n \rightarrow \infty} w_i = p_i$. Для дискретної випадкової величини полігон і накопичений полігон відносних частот є емпіричними аналогами відповідно полігона й накопиченого полігона теоретичних розподілів.

Нехай у вибірці неперервна випадкова величина X приймає значення, що лежать на сегменті $[a, b]$. Зазначений діапазон розбитий на m однакових класових інтервалів величиною $\Delta = \frac{b-a}{N}$, а відносні частоти влучення в інтервали $\{\Delta x_i\}_{i=1, \dots, m}$, де $\Delta x_i = [x_i, \Delta x_i)$, а $x_i = a + (i-1)\Delta$, становлять $\{\Delta w_i\}_{i=1, \dots, m}$. Стовчасті діаграми з основами стовпців $\{\Delta x_i\}_{i=1, \dots, m}$ та їхніми висотами

$\left\{ \frac{\Delta w_i}{\Delta x_i} \right\}_{i=1, \dots, m}$ і $\left\{ \sum_{j=1}^i \Delta w_j \right\}_{i=1, \dots, m}$ носять відповідно назви гістограми й накопиченої

гістограми розподілу випадкової величини. Ці гістограми є емпіричними аналогами графіків диференціального і кумулятивного теоретичного розподілів неперервної випадкової величини.

Визначені на базі емпіричних розподілів випадкових величин параметри розподілів називаються їхніми оцінками.

Величини середньої питомої ентропії H джерела дискретних повідомлень (1.11) та диференціальної ентропії H_D джерела неперервних повідомлень (1.36) визначалися на основі теоретичних розподілів, які описують імовірності появ повідомлень джерел.

Оцінки вказаних величин можуть бути отримані з відповідних емпіричних розподілів і визначаються за формулами: для середньої питомої ентропії

$$\tilde{H} = - \sum_{i=1}^m w_i \cdot \log w_i, \quad (3.6)$$

а для диференціальної ентропії

$$\tilde{H}_D = - \sum_{i=1}^m \left[\frac{\Delta w_i}{\Delta x_i} \cdot \log \left(\frac{\Delta w_i}{\Delta x_i} \right) \Delta x_i \right]. \quad (3.7)$$

Постановка задачі

Дано: імовірнісний розподіл, якому підпорядковуються повідомлення джерела інформації.

Визначити: теоретичне значення ентропії джерела, а також її емпіричні оцінки.

Послідовність виконання роботи

1. Відповідно до номеру варіанта та згідно даних табл. 3.1 для заданого закону розподілу випадкової величини, що генерується джерелом дискретних

повідомлень, використовуючи середовище математичних розрахунків:

1.1. Визначити межі зміни випадкової величини зі співвідношень $i_{min} = F^{-1}(0.001)$, $i_{max} = F^{-1}(0.999)$;

1.2. Згенерувати вибірку об'ємом 10^3 реалізацій випадкової величини на сегменті $[i_{min}, i_{max}]$ й визначити кількість реалізацій, у яких випадкова величина приймає кожне ціле значення з цього сегмента;

1.3. Побудувати в єдиному полі полігони теоретичного диференціального розподілу випадкової величини з використанням заданої формули функції розподілу й убудованої функції середовища математичних розрахунків, а також полігон емпіричного розподілу, отриманого на основі вибірки;

1.4. Побудувати в єдиному полі накопичений полігон теоретичного кумулятивного розподілу випадкової величини з використанням убудованої функції середовища математичних розрахунків, а також накопичений полігон емпіричного розподілу, отриманого на основі вибірки;

1.5. Визначити теоретичне значення ентропії джерела, а також її емпіричні оцінки для вибірок об'ємом n : 50, 10^2 , $5 \cdot 10^2$, 10^3 , $5 \cdot 10^3$. Результати представити у вигляді графіка залежності оцінки від об'єму вибірки з логарифмічним масштабом по осі аргументу.

2. Відповідно до номеру варіанта та даних табл. 3.2 для заданого закону розподілу випадкової величини, що генерується джерелом неперервних повідомлень, використовуючи середовище математичних розрахунків:

2.1. Визначити межі зміни випадкової величини зі співвідношень $x_{min} = F^{-1}(0.001)$, $x_{max} = F^{-1}(0.999)$;

2.2. Визначити межі двадцяти однакових класових інтервалів, що покривають сегмент $[x_{min}, x_{max}]$. Згенерувати вибірку об'ємом 10^3 реалізацій випадкової величини й визначити кількість реалізацій, що попадають у кожний класовий інтервал;

2.3. Побудувати в єдиному полі графіки теоретичного диференціального розподілу випадкової величини з використанням заданої формули функції розподілу й убудованої функції середовища математичних розрахунків, а також гістограму емпіричного розподілу, отриманого на основі вибірки;

2.4. Побудувати в єдиному полі графік теоретичного кумулятивного розподілу випадкової величини з використанням убудованої функції середовища математичних розрахунків, а також накопичену гістограму емпіричного розподілу, отриманого на основі вибірки;

2.5. Визначити теоретичне значення диференціальної ентропії джерела, а також її емпіричні оцінки для вибірок об'ємом n : 50, 10^2 , $5 \cdot 10^2$, 10^3 , $5 \cdot 10^3$. Результати представити у вигляді графіка залежності оцінки від об'єму вибірки з логарифмічним масштабом по осі аргументу.

Вимоги до звіту

Звіт роботі повинен містити:

1. Назву дисципліни та лабораторної роботи.
2. Прізвище, ім'я та по батькові студента, шифр групи.
3. Об'єкт, предмет і мету лабораторної роботи.

4. Аналітичний вираз для диференціального розподілу випадкової величини аналізованого джерела.

5. Код програми, що реалізує поставлені завдання.

6. Полігони, графіки, гістограми теоретичних і емпіричних диференціальних розподілів випадкової величини.

7. Накопичені полігони, графіки, гістограми теоретичних і емпіричних кумулятивних розподілів випадкової величини.

8. Графік залежності емпіричної оцінки випадкової величини, що генерується джерелом сигналу, від об'єму вибірки.

9. Висновки.

Основні контрольні питання і завдання – № 1 – 18 до розділу 1.

Додаткові контрольні питання і завдання

1. Дайте визначення і сформулюйте основні властивості імовірності випадкової події.

2. Дайте визначення випадкових величин. Наведіть приклади дискретних та безперервних випадкових величин.

3. Наведіть співвідношення між диференціальними і кумулятивними теоретичними розподілами дискретних і неперервних випадкових величин.

4. Сформулюйте основні властивості теоретичних розподілів дискретних і неперервних випадкових величин.

5. Дайте визначення інверсного кумулятивного розподілу випадкової величини.

6. Назвіть найпоширеніші закони розподілу дискретних і неперервних випадкових величин.

7. Поясніть різницю між теоретичними й емпіричними розподілами випадкових величин.

8. Наведіть співвідношення між диференціальними і кумулятивними емпіричними розподілами дискретних і неперервних випадкових величин.

9. Побудуйте полігон і накопичений полігон для теоретичних розподілів випадкової величини, що характеризує результат кидання монети, а також їхні емпіричні аналоги для п'яти випадкових реалізацій.

10. Неперервна випадкова величина може приймати значення, що лежать на сегменті $[0, 4]$. Внаслідок досліду отримані значення величини $\{1,15, 2,38, 1,89, 3,33, 0,06\}$. Побудуйте гістограми й накопичені гістограми для емпіричних розподілів випадкової величини при кількості m класових інтервалів 2 та 4.

11. Наведіть співвідношення для визначення теоретичного значення середньої питомої ентропії джерела дискретних повідомлень і її емпіричної оцінки.

12. Наведіть співвідношення для визначення теоретичного значення диференціальної ентропії джерела безперервних повідомлень і її емпіричної оцінки.

13. Отримайте співвідношення для розрахунків середньої питомої ентропії джерела дискретних повідомлень і диференціальної ентропії джерела безперервних повідомлень, що мають рівномірні розподіли.

Таблиця 3.1

№ варіанта	Назва розподілу і його параметри ¹⁾	Формула диференціального розподілу ²⁾	Формула ентропії	Показчики функцій розподілу середовища MathCAD ³⁾
1, 6, 11, 16, 21, 26, 31	Рівномірний $i_{\min} < i_{\max} \in \mathbf{N}$; $i_{\min} = \mathcal{N} \bmod 3$; $i_{\max} = \mathcal{N} \bmod 5 + 10$	$\frac{1}{i_{\max} - i_{\min} + 1};$ $i_{\min} \leq i \leq i_{\max}$	$\log(i_{\max} - i_{\min} + 1)$	$dunif(i, i_{\min} - 0.5, i_{\max} + 0.5)$ $punif(i, i_{\min} - 0.5, i_{\max} + 0.5)$ $qunif(P, i_{\min} - 0.5, i_{\max} + 0.5)$ $round(runif(K, i_{\min} - 0.5, i_{\max} + 0.5))$
2, 7, 12, 17, 22, 27, 32	Пуассона $\lambda \in \mathbf{R}$; $\lambda = \mathcal{N} \bmod 10 + 1$	$\frac{\lambda^i}{i!} \exp(-\lambda); i \geq 0$	$\lambda \log \frac{e}{\lambda} + \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{i!} \exp(-\lambda) \log(i!)$	$dpois(i, \lambda)$ $ppois(i, \lambda)$ $qpois(P, \lambda)$ $rpois(K, \lambda)$
3, 8, 13, 18, 23, 28	Біномний $n \in \mathbf{N}; n = \mathcal{N} \bmod + 5$; $p \in \mathbf{R}$; $0 < p < 1; p = 1/\mathcal{N}$	$C_n^i p^i (1-p)^{n-i}; i \geq 0$	$-n[p \log p + (1-p) \log(1-p)]$ $-\sum_{i=1}^{n-1} C_n^i p^i (1-p)^{n-i} \log C_n^i$	$dbinom(i, n, p)$ $pbinom(i, n, p)$ $qbinom(P, n, p)$ $rbinom(K, n, p)$
4, 9, 14, 19, 24, 29	Геометричний $p \in \mathbf{R}$; $0 < p < 1; p = 2/\mathcal{N}$	$p(1-p)^i; i > 0$	$-\frac{p \log p + (1-p) \log(1-p)}{p}$	$dgeom(i, p)$ $pgeom(i, p)$ $qgeom(P, p)$ $rgeom(K, p)$
5, 10, 15, 20, 25, 30	Гіпергеометричний $n, a, b \in \mathbf{N}$; $0 \leq n \leq a+b$; $a = \mathcal{N} \bmod 2$; $b = \mathcal{N} \bmod 3$; $n = (a+b) \bmod 2$	$\frac{C_a^i C_b^{n-i}}{C_{a+b}^n}$ $\max(0, n-b) \leq i \leq \min(n, a)$ $\max(0, n-a) \leq n-i \leq \min(n, b)$	$\log C_{a+b}^n -$ $-\frac{1}{C_{a+b}^n} \sum_{i=\max(0, n-b)}^{\min(n, a)} C_a^i C_b^{n-i} \log(C_a^i C_b^{n-i})$	$dhypergeom(i, a, b, n)$ $phypergeom(i, a, b, n)$ $qhypergeom(P, a, b, n)$ $rhypergeom(K, a, b, n)$

1) Тут і далі при визначенні параметрів варіанта завдання з номером № використовуються операції цілочисельного ділення, що позначаються символами div та mod і визначаються як: $a \text{ div } b = [a/b]$; $a \text{ mod } b = a - [a/b] \cdot b$, де квадратні дужки символізують функцію виділення цілої частини, 2) За межами зазначеної області визначення щільність імовірності покладається рівної нулю, 3) Функціям заданого типу відповідають префікси: d – диференціального розподілу, p – кумулятивного розподілу, q – інверсного кумулятивного розподілу, r – генератора випадкових чисел із заданим розподілом.

Таблиця 3.2

№ варіанта	Назва розподілу і його параметри ¹⁾	Формула диференціального розподілу ²⁾	Формула ентропії	Показники функцій розподілів середовища MathCAD ³⁾
1, 8, 15, 22, 29	Нормальний $\mu, \sigma \in \mathbf{R}, \sigma > 0;$ $\mu = \text{№} \text{ mod } 3;$ $\sigma = \text{№} \text{ mod } 3 + 1$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$	$\log(\sigma\sqrt{2\pi e})$	$dnorm(x, \mu, \sigma)$ $pnorm(x, \mu, \sigma)$ $qnorm(P, \mu, \sigma)$ $rnorm(K, \mu, \sigma)$
2, 9, 16, 23, 30	Пірсона (χ^2) $n \in \mathbf{N}; n = \text{№}$	$\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1}}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \exp\left(-\frac{x}{2}\right);$ $x \geq 0$	$1 + \log\left[\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right] + \left[\frac{n}{2} - \left(\frac{n}{2} - 1\right)\psi\left(\frac{n}{2}\right)\right] \log(e)$	$dchisq(x, n)$ $pchisq(x, n)$ $qchisq(P, n)$ $rchisq(K, n)$
3, 10, 17, 24, 31	Гамма $s \in \mathbf{R}; s > 0; s = \text{№}$	$\frac{x^{s-1}}{\Gamma(s)} \exp(-x); x \geq 0$	$\log[\Gamma(s)] + [s - (s-1)\psi(s)] \log(e)$	$dgamma(x, s)$ $pgamma(x, s)$ $qgamma(P, s)$ $rgamma(K, s)$

Закінчення табл. 3.2

№ варіанта	Назва розподілу і його параметри ¹⁾	Формула диференціального розподілу ²⁾	Формула ентропії	Показники функцій розподілів середовища MathCAD ³⁾
4, 11, 18, 25, 32	Вейбулла $s \in \mathbf{R}; s > 0; s = 1 + 1/\mathbb{N}_0$	$sx^{s-1} \exp(-x^s); x \geq 0$	$\log(e) \left[1 + \frac{s-1}{s} C \right] - \log(s)$ $C = 0.5772$	$dweibull(x, s)$ $pweibull(x, s)$ $qweibull(P, s)$ $rweibull(K, s)$
5, 12, 19, 26	Експонентний $s \in \mathbf{R}; s > 0; s = \mathbb{N}_0/10$	$s \exp(-sx); x \geq 0$	$\log\left(\frac{e}{s}\right)$	$dexp(x, s)$ $pexp(x, s)$ $qexp(P, s)$ $rexp(K, s)$
6, 13, 20, 27	Рівномірний $x_{\min} < x_{\max} \in \mathbf{R};$ $x_{\min} = \mathbb{N}_0 \bmod 3;$ $x_{\max} = \mathbb{N}_0 \bmod 5 + 10$	$\frac{1}{x_{\max} - x_{\min}};$ $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$	$\log(x_{\max} - x_{\min})$	$dunif(x, x_{\min}, x_{\max})$ $punif(x, x_{\min}, x_{\max})$ $qunif(P, x_{\min}, x_{\max})$ $runif(K, x_{\min}, x_{\max})$
7, 14, 21, 28	Логарифмічно нормальний $\mu, \sigma \in \mathbf{R}, \sigma > 0;$ $\mu = \mathbb{N}_0 \bmod 2;$ $\sigma = 1$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi x \sigma}} \exp\left\{-\frac{[\ln(x) - \mu]^2}{2\sigma^2}\right\};$ $x \geq 0$	$\log[\sigma \exp(\mu) \sqrt{2\pi e}]$	$dlnorm(x, \mu, \sigma)$ $plnorm(x, \mu, \sigma)$ $qlnorm(P, \mu, \sigma)$ $rlnorm(K, \mu, \sigma)$

¹⁾ Тут $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ – число сполучень із n по m елементів без повторення; $\Gamma(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{x-1} \exp(-t) dt$ – гамма-функція;

$\psi(x) = \frac{d}{dx} [\Gamma(x)]$ – пси-функція. Показники відповідних функцій середовища MathCAD мають вигляд: $combin(n, m); \Gamma(x);$

$Psi(x)$.

3.2. Узгодження джерела дискретних повідомлень з двійковим симетричним каналом передачі повідомлень

Об'єкт – система з джерела дискретних повідомлень, кодеру та каналу передачі повідомлень. Предмет – показники швидкості передачі повідомлень і інформації. Мета – експериментальне дослідження.

Основні теоретичні відомості – викладені у п. 1.11, 1.12, 2.3, 2.6.2.

Додаткові теоретичні відомості

Узагальнена структурна схема інформаційної системи передачі-прийому повідомлень представлена на рис. 3.1 і має такі елементи:

- джерело повідомлень;
- кодер;
- канал передачі повідомлень, на який у загальному випадку можуть впливати перешкоди;
- декодер;
- приймач повідомлень.

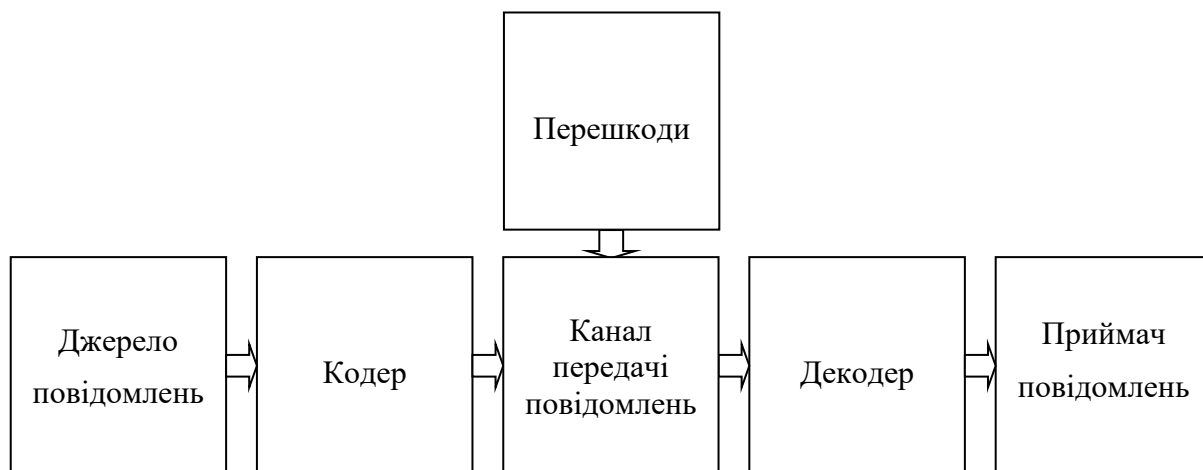


Рис. 3.1 Узагальнена структурна схема інформаційної системи передачі-прийому повідомлень

Надалі обмежимося аналізом сумісної роботи перших трьох складових у припущеннях:

- повідомлення, що генеруються джерелом, дискретні, несумісні і незалежні;
- кодер здійснює перетворення вхідних повідомлень у двійкові;
- канал є симетричним, тобто імовірності взаємного прекручення двійкових символів при передачі рівні.

Джерело повідомлень виробляє m повідомлень з імовірностями $\{p_i\}_{i=1,\dots,m}$ й швидкістю U_s . Характеризується ентропією H , яка розраховується за формулою (1.11) і потоком інформації $S = U_s \cdot H$.

Кодер перетворює вхідні повідомлення в кодові слова, що складаються з двійкових символів. Характеризується середнім значенням довжин кодових слів n_c і швидкістю генерації двійкових кодових символів $U_k = U_s \cdot n_c$.

Канал здійснює передачу повідомлень від джерела до приймача. У разі відсутності перешкод характеризується швидкістю передачі сигналів (двійкових кодових символів) U та пропускну спроможністю $C_{\Pi} = U \cdot H_{\max}$, H_{\max} – максимальна ентропія повідомлення. Оскільки для двійкових повідомлень $H_{\max} = 1$, то пропускну спроможність чисельно дорівнює швидкості передачі: $C_{\Pi} = U$.

У разі наявності перешкод симетричний канал для двійкових повідомлень характеризується імовірністю перекручення двійкового символу p і має пропускну спроможність C_{Π}^3 , яка розраховується за формулою (1.92).

Узгодження джерела повідомлень з каналом передачі повинне здійснюватися:

- за швидкістю передачі інформації. При цьому потік інформації джерела S не повинен перевищувати пропускну спроможність каналу C_{Π}^3 ;

- за швидкістю передачі сигналів. При цьому швидкість генерації двійкових символів кодером U_k не повинна перевищувати швидкості передачі символів по каналу U .

Відповідно коефіцієнти завантаження каналу визначаються так:

- інформацією

$$K_i = \frac{S}{C_{\Pi}^3} = \frac{U_s \cdot H}{C_{\Pi}^3}; \quad (3.8)$$

- кодом

$$K_k = \frac{U_k}{U} = \frac{U_s \cdot n_c}{U}. \quad (3.9)$$

Таким чином, виходячи з умов узгодження, максимальна швидкість генерації повідомлень джерелом, для подальшої передачі по каналу в реальному масштабі часу, визначається як своє мінімальне значення при якому досягається рівність одиниці хоча б одного з коефіцієнтів завантаження каналу і становить

$$U_s^{\max} = \min \left(\frac{C_{\Pi}^3}{H}, \frac{U}{n_c} \right). \quad (3.10)$$

Постановка задачі

Дано: параметри джерела повідомлень, кодеру, каналу і перешкоди.

Визначити: показники завантаження каналу і характеристики залежності максимальної швидкості генерації повідомлень джерелом від параметрів кодеру, каналу і перешкоди.

Послідовність виконання роботи

1. Відповідно до номеру варіанта та даних табл. 3.3 розрахувати:

1.1. Ентропію джерела повідомлень;

1.2. Максимальну швидкість генерації повідомлень джерелом при для трьох варіантів кодування:

– первинного ($n_c = 8$);

– нормального двійкового $n_c = \begin{cases} \log t & \text{при } \log t = [\log t], \\ [\log t] + 1 & \text{при } \log t \neq [\log t], \end{cases}$

де квадратні дужки символізують функцію виділення цілої частини;

– оптимального ($n_c = H$);

1.3. Породжуваний джерелом потік інформації для всіх варіантів кодування;

1.4. Коефіцієнти завантаження каналу інформацією та кодом для всіх варіантів кодування.

2. Побудувати сімейство графіків залежностей (при значеннях параметрів відповідно до варіанта) максимальної швидкості генерації повідомлень джерелом від:

2.1. Імовірності перекручення двійкового символу в каналі $0 < p < 1$ для всіх розглянутих варіантів кодування;

2.2. Середньої довжини кодового слова $H \leq n_c \leq 8$ для імовірностей перекручення символу $p, 0.5 \cdot p, 2 \cdot p$;

2.2. Пропускної спроможності каналу без перешкод $0 \leq U' \leq U$ для всіх розглянутих варіантів кодування;

2.3. Пропускної спроможності каналу без перешкод $0 \leq U' \leq U$ для імовірностей перекручення символу $p, 0.5 \cdot p, 2 \cdot p$.

Вимоги до звіту

Звіт повинен містити:

1. Назву дисципліни та лабораторної роботи.

2. Прізвище, ім'я та по батькові студента, шифр групи.

3. Об'єкт, предмет і мету лабораторної роботи.

4. Результати розрахунків:

4.1. Ентропії джерела інформації;

4.2. Максимальної швидкості генерації повідомлень джерелом для розглянутих варіантів кодування;

4.3. Породжуваного джерелом потоку інформації для всіх варіантів кодування;

4.4. Коефіцієнтів завантаження каналу інформацією та кодом для всіх варіантів кодування.

5. Сімейства графіків залежностей максимальної швидкості генерації повідомлень джерелом від:

5.1. Імовірності перекручення символу в каналі для всіх розглянутих варіантів кодування;

5.2. Середньої довжини кодового слова для заданих імовірностей трансформації двійкового символу;

5.3. Пропускної спроможності каналу без перешкод для всіх розглянутих варіантів кодування;

5.4. Пропускної спроможності каналу без перешкод для заданих імовірностей трансформації двійкового символу.

6. Висновки.

Основні контрольні питання і завдання – № 28 – 36 до розділу 1.

Додаткові контрольні питання і завдання

1. Наведіть узагальнену структурну схему інформаційної системи передачі-прийому повідомлень. Поясніть призначення її елементів і вкажіть основні параметри, якими характеризуються елементи.

2. Дайте визначення пропускної спроможності каналу передачі інформації. Наведіть співвідношення для розрахунків пропускної спроможності каналу при відсутності перешкод.

3. Побудуйте залежність пропускної спроможності двійкового симетричного каналу від імовірності перекручення символу в каналі. Поясніть причину наявності точки екстремума залежності.

4. Наведіть формули для розрахунку коефіцієнтів завантаження каналу за інформацією та кодом.

5. Отримайте співвідношення для визначення максимальної швидкості генерації повідомлень джерелом за умови можливості подальшої передачі по каналу в реальному масштабі часу.

Таблиця 3.3

№ варіанта	Джерело повідомлень						Канал і перешкода	
	m	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	U	p
1	3	0,5	0,3	0,2	-	-	800	0,05
2	5	0,4	0,25	0,18	0,1	0,07	1500	0,07
3	5	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	1500	0,06
4	4	0,45	0,3	0,15	0,1	-	1200	0,02
5	3	0,48	0,3	0,22	-	-	2000	0,03
6	5	0,42	0,27	0,16	0,11	0,04	1000	0,05
7	4	0,52	0,28	0,12	0,08	-	1300	0,04
8	3	0,47	0,31	0,22	-	-	1000	0,01
9	5	0,43	0,26	0,15	0,11	0,05	1400	0,02
10	4	0,25	0,25	0,25	0,25	-	1700	0,03
11	3	0,4	0,3	0,3	-	-	1600	0,06
12	5	0,4	0,25	0,18	0,1	0,07	2200	0,05
13	4	0,45	0,25	0,2	0,1	-	1100	0,03
14	4	0,46	0,3	0,12	0,12	-	1000	0,02
15	5	0,45	0,25	0,15	0,14	0,01	1300	0,01
16	3	0,55	0,25	0,2	-	-	1700	0,04

№ варіанта	Джерело повідомлень						Канал і перешкода	
	N	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	U	P
17	4	0,45	0,33	0,13	0,09	-	1300	0,05
18	4	0,42	0,25	0,18	0,15	-	2000	0,03
19	3	0,34	0,33	0,33	-	-	1900	0,07
20	5	0,5	0,2	0,15	0,1	0,05	2500	0,05
21	5	0,36	0,27	0,22	0,12	0,03	3400	0,1
22	3	0,66	0,21	0,13	-	-	520	0,02
23	4	0,7	0,2	0,05	0,05	-	800	0,04
24	5	0,58	0,18	0,11	0,09	0,04	1400	0,06
25	5	0,84	0,06	0,05	0,03	0,02	1100	0,05
26	4	0,35	0,35	0,15	0,15	-	640	0,04
27	3	0,9	0,05	0,05	-	-	1800	0,1
28	5	0,56	0,26	0,1	0,05	0,03	1400	0,08
29	3	0,41	0,33	0,26	-	-	1500	0,01
30	4	0,51	0,19	0,17	0,13	-	2300	0,05
31	3	0,77	0,18	0,05	-	-	3100	0,09
32	5	0,3	0,3	0,15	0,15	0,1	630	0,07

3.3. Ознайомлення з формами первинного кодування інформації в комп'ютерах

Об'єкт – файли даних. Предмет – файлові формати. Мета – отримання навичок декодування файлів різних форматів.

Теоретичні відомості

Як відомо, у сучасних комп'ютерах інформація (дані) представляється в дискретній і двійково-кодованій формах. Первинне кодування даних орієнтоване на зручність розв'язання максимально широкого кола задач. Як правило, для кожного елемента даних використовується код з довжиною, кратною байту.

Конкретне подання даних у комп'ютері залежить від формату файлів. При цьому файл, як правило, містить один або декілька заголовків, де детально описані «правила» розміщення первинних кодів даних. Виключення становлять текстові файли формату TXT, в яких кожний байт інтерпретується як окремий знак відповідно до таблиці кодування.

Знаки (символи) найчастіше представляються однобайтовими кодами. Значення кодів цифр, латинських букв і деяких часто використовуваних знаків, а також кодів, що забезпечують управління обміном даними, фіксовані. Інші коди можуть інтерпретуватися у вигляді букв різних національних алфавітів або символів псевдографіки. Вибір форми, в якій відображається той або інший код, виконується за допомогою кодових сторінок або таблиць перекодування. Найпоширеніші таблиці Windows (CP-1251) і MS-DOS (CP-866) як приклади наведені у додатку 6.

Кодування растрових графічних даних розглянемо на прикладі формату BMP. Файли даного формату включають заголовки BITMAPFILEHEADER довжиною 14 байт і BITMAPINFOHEADER довжиною 40 байт, при глибині кольору до 8 bpp (Bit Per Pixel – кількість біт, якими кодується колір кожного пікселя) – палітру й власно растрові дані. Порядок проходження байтів у багатобайтових даних – спочатку молодший, потім старший, прийнятий для процесорів сімейства Intel, використовуваних на платформі Windows. Далі розглядаються значення даних з використанням шістнадцяткових (HEX) кодів. Для числових значень даних, при необхідності, основа використовуваної системи числення вказується у вигляді індексу. Структура заголовка BITMAPFILEHEADER наведена в табл. 3.4.

Таблиця 3.4

Довжина даних, байт	Опис даних
2	Строковий ідентифікатор: BM
4	Розмір файлу в байтах
4	Зарезервовані нульові байти
4	Адреса початку растрових даних у даному файлі

Структура заголовка BITMAPINFOHEADER наведена в табл. 3.5.

Таблиця 3.5

Довжина даних, байт	Опис даних
4	Довжина заголовка в байтах 28_{16} (40_{10})
4	Ширина растра в пікселях
4	Висота растра в пікселях
2	Зарезервовані байти зі значеннями 01 і 00
2	Глибина кольору, bpp
4	Зарезервовані нульові байти
4	Розмір у байтах растрових даних
4	Розрізнення по горизонталі в пікселях на метр
4	Розрізнення по вертикалі в пікселях на метр
8	Для файлів, які використовують палітру значення відмінно від нуля, якщо число кольорів палітри, що відрізняються, менше за максимально можливе, обумовлене глибиною кольору, у супротивному випадку – нульові байти

Для файлів, що не використовують палітру, у растрових даних під колір кожного пікселя виділяється 3 байти, порядок проходження байтів BGR. При

використанні палітри під кожний колір приділяється чотирьохбайтовий запис у вигляді BGRQUAD, де перші три байти характеризують величину відповідного колірнього компонента, а четвертий зарезервований і є нульовим. Кількість записів у палітрі дорівнює кількості реально використовуваних кольорів. Растрові дані при цьому являють собою однобайтові індекси кольору в палітрі, індексація в палітрах починається з нуля. Растрові дані у файлі записані з нижнього лівого кута зображення до верхнього правого по рядках. Кількість байтів у рядку повинна бути кратною чотирьом. Якщо розмір растра по горизонталі не відповідає цій умові, то праворуч у кожний рядок дописується необхідне число байтів. Зазначена процедура зветься вирівнюванням на границю подвійного слова.

У табл. 3.6 наведений приклад HEX кодів перших 64 байтів файлу растрових графічних даних з глибиною кольору 24 bpp у форматі BMP, що містять описи заголовків файлу BITMAPFILEHEADER (байти 1 – 14), BITMAPINFOHEADER (байти 15 – 54) і початок власно растрових даних (байти 55 – 64). Зображення реально використовує два кольори: білий і чорний.

Таблиця 3.6

42	4D	36	57	04	00	00	00	00	00	36	00	00	00	28	00
00	00	EA	00	00	00	94	01	00	00	01	00	18	00	00	00
00	00	00	57	04	00	12	0B	00	00	12	0B	00	00	00	00
00	00	00	00	00	00	FF	FF	FF	FF	FF	FF	FF	FF	FF	FF

Розмір файлу в байтах $45736_{16}=284470_{10}$, адреса початку растрових даних $36_{16}=54_{10}$, ширина растра в пікселях $EA_{16}=234_{10}$, висота растра в пікселях $194_{16}=404_{10}$, глибина кольору $18_{16}=24_{10}$ bpp, розмір у байтах растрових даних $45700_{16}=284416_{10}$, розрізнення по горизонталі й вертикалі в пікселях на метр $B12_{16}=2834_{10}$.

У табл. 3.7 наведений приклад HEX кодів перших 64 байтів файлу тих самих растрових графічних даних, що й у попередньому прикладі, але з глибиною кольору 8 bpp. Тут байти з 55 по 64 займають початок палітри, у байтах 55 – 58 визначений чорний колір, у байтах 59 – 62 – білий, решта в палітри заповнена чорним кольором.

Таблиця 3.7

42	4D	A6	78	01	00	00	00	00	00	36	04	00	00	28	00
00	00	EA	00	00	00	94	01	00	00	01	00	08	00	00	00
00	00	70	74	01	00	12	0B	00	00	12	0B	00	00	00	01
00	00	00	01	00	00	00	00	00	00	FF	FF	FF	00	00	00

Кодування даних цифрового звуку розглянемо на прикладі формату VOC. Файли даного формату містять заголовок довжиною 26 байтів і блоки даних. Послідовність проходження байтів у багатобайтових даних така: молодший – старший. Структура заголовка файлу формату VOC наведена в табл. 3.8.

Таблиця 3.8

Довжина даних, байт	Опис даних
19	Строковий ідентифікатор: Creative Voice File
1	Байт зі значенням $1A_{16}$ (26_{10}): Ctrl+Z – символ кінця файлу в операційній системі DOS
2	Байти зі значенням $1A_{16}$ і 00_{16} (26_{10}) – довжина заголовка в байтах
2	Код версії формату. Як правило значення дорівнює 266_{10} (версія 1.10) або 176_{10} (версія 1.20)
2	Контрольне значення коду версії: 4659_{10} – код версії

У табл. 3.9 наведений приклад HEX кодів перших 32 байтів файлу монофонічного цифрового звуку у форматі VOC, що містять опис заголовка файлу (байти 1 – 26) і заголовка першого блока даних (байти 27 – 32).

Таблиця 3.9

43	72	65	61	74	69	76	65	20	56	6F	69	63	65	20	46
69	6C	65	1A	1A	00	0A	01	29	11	01	CD	36	00	D3	00

Значення коду версії становить: $010A_{16}=266_{10}$ (версія 1.10), контрольне значення коду версії: $4659_{10} - 1129_{16}=266_{10}$.

Блоки даних складаються з чотирибайтового заголовка, перший байт якого визначає тип блока, а три байти, що залишилися, довжину даних, а також власно дані. Виключення становить блок ознаки закінчення, що містить єдиний нульовий байт. Визначено такі типи блоків (значення типів позначені в дужках):

- звукових даних (1);
- продовження даних (2);
- паузи (3);
- маркерний (4);
- текстовий (5);
- повторення (6,7);
- розширення (8,9).

Блок звукових даних (тип 1) починається з двох байтів, які визначають код частоти дискретизації *code1* й використовуваний аудіокодек, після яких ідуть власно коди рівнів відліків звукового сигналу. Частота дискретизації визначається зі співвідношення

$$f_d = \frac{10^6}{2^8 - code1}, \text{ Гц.} \quad (3.11)$$

Коди аудіокодеків, підтримуваних форматом VOC, наведені в табл. 3.10.

Таблиця 3.10

Код	Аудіокодек
0	Беззнакова 8 bit PCM
1	4 bit ADPCM
2	6 bit ADPCM
3	2 bit ADPCM
4	16 bit PCM
6	CCITT a-Law
7	CCITT u-Law(μ -Law)

У прикладі, наведеному в табл. 3.9, після заголовка файлу безпосередньо йде блок звукових даних довжиною $36CD_{16}=14$ кбайт із частотою дискретизації $10^6/(2^8 - D3_{16})=22,2$ кГц, представлених з використанням беззнакової 8-бітової PCM.

Файл формату VOC може мати тільки один блок звукових даних.

Блок продовження даних (тип 2) використовується в тому випадку, коли необхідно встановити в середину звукових даних блок іншого типу (наприклад блок паузи). Частина звукових даних, що залишилася, зберігається в блоці продовження. Блок продовження як дані містить тільки коди рівнів відліків звукового сигналу.

Блок паузи (тип 3) визначає період тиші. Дані такого блока займають три байти, перші два визначають кількість відліків тиші, а третій – частоту дискретизації, яка використовується в блоці.

Маркерний блок (тип 4) може використовуватися мультимедійними додатками для синхронізації подій. Наприклад, подія входу в маркерний блок може викликати зміну зображення, запуск фільму або іншого додатка. Дані маркерного блока являють собою двобайтове число, значення 0000 і FFFF зарезервовані й не повинні використовуватися.

Текстовий блок (тип 5) призначений для збереження всередині файлу текстової інформації. Являє собою рядок в ASCII кодах з нульовим символом на кінці.

Блоки повторення (типи 6, 7) використовуються для організації циклів усередині файлу. Блок типу 6 міститься на початку області, яку необхідно повторити. Дані блока являють собою двобайтове число, що показує кількість повторень. Блок типу 7 знаходиться в кінці області повторення і не містить асоційованих даних. Можлива організація вкладених циклів.

Блок розширення (тип 8) використовується для підтримки файлів зі стереозвуком. Якщо цей блок присутній, він передує блоку звукових даних (тип 1) і перевизначає інформацію про частоту дискретизації й тип використовуваного аудіокодека. Дані блока містять чотири байти, перші два з яких визначають код точного значення частоти дискретизації *code2*, а останні два – коди аудіокодека й код кількості звукових каналів (0 – моно, 1 – стерео) відповідно. Точне значення частоти дискретизації визначається зі співвідношення

$$f_d = \frac{2^8 \cdot 10^6}{2^{16} - \text{code}2}, \text{ Гц.} \quad (3.12)$$

Для файлів стереозвуку величину частоти дискретизації, розраховану за приведеними вище формулами, необхідно зменшити вдвічі, оскільки коди рівнів відліків звукового сигналу для лівого й правого каналів у блоках типів 1 і 2 при цьому чергуються і слідують зі зменшеною вдвічі частотою.

У табл. 3.11 наведений приклад HEX кодів перших 40 байтів файлу стереофонічного цифрового звуку у форматі VOC, що містять опис заголовка файлу (байти 1 – 26), блока розширення (байти 27 – 34) і заголовка блока звукових даних (байти 35 – 40).

Таблиця 3.11

43	72	65	61	74	69	76	65	20	56	6F	69	63	65	20	46
69	6C	65	1A	1A	00	0A	01	29	11	08	04	00	00	54	E9
00	01	01	02	40	00	E9	00								

Точне значення частоти дискретизації, яке визначено в блоці розширення, становить $2^8 \cdot 10^6 / (2^{16} - E954_{16}) = 44,1$ кГц. Для порівняння приблизне значення, яке визначено в блоці звукових даних, складає $10^6 / (2^8 - E9_{16}) = 43,5$ кГц. Дана величина є наближеною й отриманою за допомогою одnobайтового коду $E9_{16}$ (байт 39), значення якого збігається зі значенням старшого байта двобайтового коду $E954_{16}$ (байти 31, 32), використаного при розрахунку точного значення величини частоти дискретизації. Оскільки дані описують стереозвук, про що свідчить одиничне значення байта 34, реальна частота дискретизації буде вдвічі менше, отриманої за виразом (2), і складе 22,05 кГц.

Блок розширення (тип 9) дозволяє зберігати інформацію про звук у явному виді й вводити нові двобайтові коди аудіокодеків. Якщо цей блок присутній, він передує блокам типів 1 та 8 і перевизначає інформацію, що міститься в них. Дані блока розширення типу 9 наведені в табл.3.12.

Таблиця 3.12

Довжина даних, байт	Опис даних
4	Частота дискретизації, Гц
1	Розрядність оцифрування, біт
1	Кількість каналів (1 – моно, 2 – стерео)
2	Код аудіокодека
4	Зарезервовані байти

Значення частоти дискретизації не кодується, а зберігається безпосередньо й не потребує корекції за числом каналів.

Постановка задачі

Дано: файли текстових, графічних та звукових даних.

Визначити: основні параметри даних, що містяться в файлах.

Послідовність виконання роботи

1. Створити текстовий файл, який містить по п'ять символів з кодами, що йдуть послідовно і починаються зі значень 30+№ та 130+№, де № – номер варіанта. Для генерації символу із заданим кодом можна скористатися комбінацією клавіш Alt + код (Num Lock). При цьому на екрані виникає символ, котрий має даний код у таблиці MS-DOS (CP-866). Однак при перегляді його шістнадцяткового коду буде отримане значення, що відповідає цьому символу в таблиці Windows (CP-1251), якщо символ створений у середовищі Windows. За цієї причини для генерації символів варто використовувати текстові редактори ОС DOS, наприклад, убудовані текстові редактори файлових менеджерів ОС DOS FAR, Norton (Volkov) Commander. У разі відсутності на комп'ютері режиму емуляції ОС DOS для генерації символів можна використовувати текстовий редактор, аксесуар ОС Windows, Notepad (Блокнот). При цьому слід брати до уваги відзначену вище особливість кодів символів, що генеруються у середовищі ОС Windows.

2. З використанням текстового редактора, який має режим відображення шістнадцяткових кодів, переглянути символи, що містяться у файлах з кодуванням Windows (CP-1251) і, за можливості, MS-DOS (CP-866). У вбудованих текстових редакторах файлових менеджерів ОС DOS FAR, Norton (Volkov) Commander для включення режиму перегляду вмісту файлу використовується гаряча клавіша F3. У режимі перегляду перемикання відображення вмісту у вигляді символів або їхніх кодів здійснюється клавішею F4, а перемикання кодової таблиці при відображенні символів – клавішею F8. Однак для точного відображення символів у кодуванні Windows (CP-1251) варто використовувати текстовий редактор ОС Windows, наприклад Notepad (Блокнот). Зафіксувати й представити у вигляді таблиці значення:

2.1. Десяткового коду символу, використаного при його генерації;

2.2. Шістнадцяткових кодів символів, що даються переглядачем, і відповідних їм десяткових кодів;

2.3. Символів у кодуваннях Windows (CP-1251) і MS-DOS (CP-866), що відповідають цим кодам.

3. З використанням текстового редактора, що має режим відображення шістнадцяткових кодів, переглянути коди даних файлу растрових графічних даних формату BMP відповідно до номеру варіанта. Зафіксувати: адреси (порядкові номери), шістнадцяткові й десяткові значення байтів, а також значення величин, закодованих у заголовках BITMAPFILEHEADER BITMAPINFOHEADER відповідно до табл. 3.4 і 3.5 крім зарезервованих байтів. Зафіксувати тіж самі дані для перших дванадцяти байтів палітри (для файлів із глибиною кольору до 8 bpp) або растра.

4. З використанням текстового редактора, що має режим відображення шістнадцяткових кодів, переглянути коди файлу даних цифрового звуку формату VOC відповідно до номеру варіанта. Зафіксувати: адреси (порядкові

номери), шістнадцяткові й десяткові значення байтів, а також значення величин, закодованих у заголовку файлу відповідно до табл. 3.8, крім байтів строкового ідентифікатора. Зафіксувати тіж самі дані для заголовка блока звукових даних у випадку монофонічного звуку або блока розширення у випадку стереофонічного.

Вимоги до звіту

Звіт повинен містити:

1. Назву дисципліни та лабораторної роботи.
2. Прізвище, ім'я та по батькові студента, шифр групи.
3. Об'єкт, предмет і мету лабораторної роботи.
4. Таблиці даних згідно п. 2 – 4 завдання.
5. Висновки.

Контрольні питання

1. Наведіть співвідношення для перерахування довільного цілого числа із системи числення з довільною основою в десяткову систему числення.

2. Викладіть алгоритм для перерахування довільного цілого числа з десяткової системи числення в систему числення з довільною основою.

3. Опишіть внутрішню структуру файлів растрових графічних даних у форматі BMP.

4. Назвіть параметри файлу формату BMP, які кодуються в заголовках BITMAPFILEHEADER і BITMAPINFOHEADER.

5. Назвіть типи блоків, визначених у форматі цифрового звуку VOC.

6. Наведіть структуру заголовка блока звукових даних формату VOC.

3.4. Вивчення алгоритмів оптимального кодування

Об'єкт – оптимальні коди. Предмет – алгоритми складання і показники якості. Мета – отримання навичок складання кодів і визначення показників їх якості.

Основні теоретичні відомості – викладені у п. 1.15, 2.1 – 2.5, 2.6.2.

Додаткові теоретичні відомості

У п. 1.15 введено поняття коефіцієнту стиснення μ (1.105), який може бути використаний як показник ефективності оптимальних кодів. З цією величиною безпосередньо пов'язане значення надлишковості коду $D = 1 - \mu$ (1.104), яка має імовірнісну D_p і статистичну D_s складові.

У подальшому в роботі вважається, що статистична залежність двійкових символів у кодових комбінаціях відсутня і надлишковість коду має суто імовірнісний характер. Тоді, з урахуванням формул ентропії джерела двійкових повідомлень (1.18), (1.21), для коефіцієнта стиснення двійкового коду можна записати

$$\mu = \frac{H}{H_{\max}} = H = -p_0 \log p_0 - p_1 \log p_1 = -p_0 \log p_0 - (1 - p_0) \log (1 - p_0), \quad (3.13)$$

де p_0 і $p_1 = 1 - p_0$ – безумовні імовірності появи кодових символів 0 та 1.
Величина p_0 може бути знайдена як

$$p_0 = \frac{n0_c}{n_c}, \quad (3.14)$$

де $n0_c$ і n_c – середня кількість нулів у кодовій комбінації та її середня довжина відповідно. Остання величина визначається за формулою (2.5), а перша може бути розрахована за аналогічним співвідношенням

$$n0_c = \sum_{i=1}^N n0_i p(x_i). \quad (3.15)$$

де $n0_i$ – кількість нулів у кодовій комбінації, що відповідає повідомленню, що кодується, з номером i . Підставляючи (2.5) і (3.15) у (3.14), остаточно отримуємо

$$p_0 = \frac{\sum_{i=1}^N n0_i p(x_i)}{\sum_{i=1}^N n_i p(x_i)}. \quad (3.16)$$

Іншим показником ефективності коду, який використовується у роботі, є відношення мінімально можливої середньої довжини кодової комбінації $n_{c \min} = \frac{H}{\log m}$, яка визначається основною теоремою кодування в каналах без перешкод, до фактичної середньої довжини n_c . Для двійкових кодів з $m = 2$ ця величина становить

$$\chi = \frac{n_{c \min}}{n_c} = \frac{-\sum_{i=1}^N p(x_i) \log p(x_i)}{\sum_{i=1}^N n_i p(x_i)}. \quad (3.17)$$

Постановка задачі

Дано: імовірнісний розподіл повідомлень джерела.

Визначити: кодові комбінації, що відповідають повідомленням при використанні нормального двійкового та оптимальних кодів, а також показники якості вказаних кодів.

Послідовність виконання роботи

1. Відповідно до номеру варіанта та даних табл. 3.13 розрахувати значення імовірностей появи $N = 10$ повідомлень, що генеруються джерелом.

Таблиця 3.13

№ варіанта	Формули для розрахунку імовірностей
1, 6, 11, 16, 21, 26, 31	$p_i = \frac{P}{1 - (1 - P)^N} (1 - P)^{i-1} \quad i = 1, \dots, N \quad P = 1 / (\text{№ div } 5 + 2)$
2, 7, 12, 17, 22, 27, 32	$p_i = \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} \quad i = 1, \dots, N \quad \lambda = \text{№ div } 5 + 1$
3, 8, 13, 18, 23, 28	$p_i = \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} \exp(-\lambda) \quad i = 1, \dots, N - 1 \quad p_N = 1 - \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!} \exp(-\lambda)$ $\lambda = \text{№ div } 5 + 1$
4, 9, 14, 19, 24, 29	$p_i = P(1 - P)^{i-1} \quad i = 1, \dots, N - 1 \quad p_N = (1 - P)^{N-1}$ $P = 1 / (\text{№ div } 5 + 2)$
5, 10, 15, 20, 25, 30	$p_i = C_{N-1}^{i-1} P^{i-1} (1 - P)^{N-i} \quad i = 1, \dots, N \quad P = 1 / (\text{№ div } 5 + 2)$

2. Побудувати граф КХ, таблиці КХ, КШФ, НДК і КГ. У якості таблиці НДК взяти таблицю двійкових подань номерів $N = 10$ повідомлень, починаючи з № варіанта. Таблицю КГ побудувати на основі цієї таблиці НДК.

3. Перевірити виконання нерівності Крафта – Макміллана для отриманих кодів.

4. Визначити відношення мінімально можливої середньої довжини кодової комбінації до фактичних середніх довжин, коефіцієнтів стиснення та надлишковостей отриманих кодів.

Вимоги до звіту

Звіт повинен містити:

1. Назву дисципліни та лабораторної роботи.
2. Прізвище, ім'я та по батькові студента, шифр групи.
3. Об'єкт, предмет і мету лабораторної роботи.
4. Розраховані значення імовірностей появи повідомлень.
5. Граф КХ, таблиці КХ, КШФ і НДК.
6. Результати перевірки виконання нерівності Крафта – Макміллана для отриманих кодів.
7. Результати розрахунків відношень мінімально можливої середньої довжини кодової комбінації до фактичних середніх довжин, коефіцієнтів стиснення та надлишковостей для отриманих кодів.

8. Висновки.

Основні контрольні питання і завдання – № 50 – 54 до розділу 1, № 1 – 22 до розділу 2.

Додаткові контрольні питання і завдання

1. Приведіть формулу для коефіцієнта стиснення двійкового коду.

2. Приведіть можливі межі зміни значень величин надлишковостей кодів.
3. Приведіть формули для середньої кількості нулів у кодовій комбінації нерівномірного коду та її середньої довжини.
4. Джерело дискретних повідомлень генерує незалежні повідомлення з імовірностями $\{0,5, 0,25, 0,125, 0,125\}$. Приведіть таблиці КХ і НДК. Визначте для них середні довжини кодових комбінацій. Поясніть за рахунок чого середня довжина КХ виявляється меншою, ніж у НДК.

3.5. Дослідження процесів стиснення растрових графічних даних за допомогою алгоритмів RLE і LZW

Об'єкт – програмні реалізації алгоритмів стиснення растрових графічних RLE і LZW. Предмет – ступень стиснення даних. Мета – експериментальне визначення.

Теоретичні відомості

При розгляді алгоритму Хаффмана (п. 2.5) було зазначено, що його версія з фіксованою таблицею використовується для стиснення растрових графічних даних. У роботі розглядаються ще два алгоритми RLE і LZW, які отримали поширення при розв'язанні таких прикладних задач.

Основним параметром алгоритму стиснення, який використовується в практиці, є ступень стиснення, котра визначається як

$$P = \frac{V_0}{V}, \quad (3.18)$$

де V_0 , V – об'єми даних до й після стиснення відповідно. Ступень стиснення визначається характером даних і алгоритмом стиснення. Розрізняють стиснення без втрат, яке забезпечує умову, що дані, до і після циклу стиснення – розстиснення збігаються, і стиснення з втратами. Крім того, такі алгоритми характеризуються показником симетричності, який визначає співвідношення між тривалостями розстиснення й стиснення.

Прикладами алгоритмів стиснення без втрат є алгоритми оптимального кодування Шеннона-Фено й Хаффмана, а також алгоритми RLE та LZW, що розглядаються далі. Алгоритми стиснення без втрат лежать в основі роботи архіваторів, наприклад ZIP, ARJ, RAR, а також підтримуються деякими файловими форматами. Ступені стиснення, забезпечувані такими алгоритмами, істотно залежать від характеру даних, що стискаються, але, як правило, не перевищують 5-ти одиниць.

Алгоритм RLE (Run Length Encoding) заснований на кодуванні групи однакових елементів коефіцієнтом повторення й значенням інформативної ознаки. Використовується для стиснення растрових графічних даних. Ефективний при глибинах кольору не більше 8 bpp. Є алгоритмом стиснення без втрат із симетричністю 1:1. Підтримується растровими графічними форматами DIB, RLE, TGA, а також входить до складу деяких алгоритмів стиснення із втратами, наприклад JPEG.

Алгоритм LZW (Lempel, Ziv, Welch) відноситься до класу словникових методів стиснення даних і належить до сімейства алгоритмів LZ78. Використовується для стиснення текстових і растрових графічних даних. В останньому випадку ефективний при глибинах кольору не більше 8 bpp. Є алгоритмом стиснення без втрат із симетричністю 1:1. Підтримується растровими графічними форматами GIF, PNG, TIF.

Словникові алгоритми стиснення передбачають створення словника, що містить послідовності елементів вхідного потоку (рядка). Кожному рядку словника присвоюється код (індекс рядка). Вихідний інформаційний потік являє собою послідовність кодів. Коди будуються таким чином, щоб у середньому їхнє представлення займало менше місця, ніж вимагають рядки, що заміщуються ними.

Спрощений алгоритм LZW можна представити в такий спосіб:

1. Ініціалізується словник, що містить коди рядків довжиною в один елемент вхідної послідовності (символ або піксель із заданим кольором). Для текстів число таких кодів буде дорівнює числу нетотожних символів алфавіту, а для растрових зображень – числу використовуваних кольорів $n=2^m$, де m – глибина кольору. Ініціалізується порожній буферний рядок.

2. Якщо вхідний потік не вичерпаний, з нього зчитується наступний елемент і здійснюється його конкатенація з вмістом буферного рядка, інакше алгоритм завершується, а у вихідний потік поміщається код, що відповідає вмісту буферного рядка.

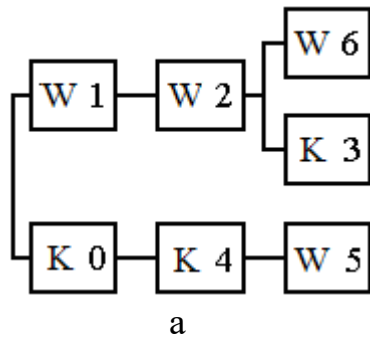
3. Перевіряється, чи є в словнику рядок, що збігається зі вмістом буферного. Якщо є, то виконується п.2. Якщо немає й словник не переповнений, у нього дописується вміст буферного рядка, якому присвоюється новий код. У буферному рядку залишається останній елемент, а у вихідний потік поміщається код вмісту буферного рядка без останнього елемента. Якщо немає й словник переповнений, у буферному рядку залишається останній елемент, а у вихідний потік поміщається код вмісту буферного рядка без останнього елемента.

Словник, що формується, зручно представляти у вигляді дерева в якому елементу вхідного потоку відповідає лист, а елементу вихідного з визначеним кодом – рядок листів від вершини дерева до листа з цим кодом.

Так, наприклад, стиснення вхідного потоку монохромних пікселів WWWKKKWWW згідно із запропонованим алгоритмом породить словник, дерево якого представлено на рис. 3.2, а, та вихідний потік 120421. Послідовність формування словника й вихідного потоку наведена на рис 3.2, б.

Розглянутий вище варіант алгоритму з однократно формованим словником. Оригінальний алгоритм LZW передбачає, у випадку переповнення словника, його очистку й нове формування.

Послідовність дискретних повідомлень несе максимальну інформацію, якщо повідомлення рівноймовірні й статистично незалежні. Алгоритм RLE зменшує нерівноймовірність повідомлень, що представляють собою елементи вхідного потоку, а алгоритм LZW – як їхню нерівноймовірність, так і статистичну залежність.



Вихідний потік
WWWKKKWWW
 Словник

б

Рис. 3.2

Постановка задачі

Дано: програмні реалізації алгоритмів стиснення растрових графічних RLE і LZW та набір тестових зображень.

Визначити: ступені стиснення зображень і їхні залежності від параметрів алгоритмів і характеру зображень.

Послідовність виконання роботи

1. Ознайомитися з інтерфейсом користувача й кодом програми bmp.exe. Програма дозволяє розпаковувати файл повнокольорового растрового зображення у форматі BMP, візуалізувати зображення, сформувані текстовий файл із растровими даними, стисненими за алгоритмом RLE, зчитати дані з текстового файлу й повторно візуалізувати зображення. Сформований текстовий файл має таку структуру:

- горизонтальний розмір растра в пікселях;
- вертикальний розмір растра в пікселях;
- рядки растрових даних, де кожний рядок відповідає групі повторюваних елементів і містить коефіцієнт повторення й індекс кольору;
- порожній рядок, що є ознакою кінця растрових даних;
- вектор палітри, що містить шістнадцяткові значення кольору в кодуванні RGB;

Інтерфейс користувача програми включає: кнопки “Запис”, ”Читання” й компоненти для візуалізації зображень. Натиснення на кнопки породжує дії:

– “Запис” – розпакування файлу повнокольорового растрового зображення у форматі BMP, візуалізацію зображення та формування текстового файлу з растровими даними, стисненими за алгоритмом RLE у каталозі, що вказується користувачем;

– ”Читання” – зчитування даних з раніше сформованого текстового файлу й повторну візуалізацію зображення.

2. Дослідити ефективність алгоритму стиснення RLE. Як тестові використовувати всі наведені у табл. 3.14 нестиснені зображення розміром $x \cdot y = 100 \cdot 100$ пікселів з глибиною кольору $m = 24$ bpp, які реально використовують від 2-х (монохромні) до 256-ти (сірі полутонові) кольорів. Незалежно від характеру такі зображення до стиснення займають $x \cdot y \cdot m \approx 30$ кбайт. Результати дослідження представити у вигляді таблиці з назвою зображення, його об’ємом після стиснення й отриманого ступеня стиснення.

3. Ознайомитися з інтерфейсом користувача й кодом програми lzw.exe. Програма дозволяє розпаковувати файл повнокольорового растрового зображення у форматі BMP, візуалізувати зображення, сформувані текстовий файл із растровими даними, стисненими за алгоритмом LZW, зчитати дані з текстового файлу й повторно візуалізувати зображення. Сформований текстовий файл має таку структуру:

- горизонтальний розмір растра в пікселях;
- вертикальний розмір растра в пікселях;
- коди рядків растрових даних;
- порожній рядок, що є ознакою кінця растрових даних;
- словник, кожний запис в якому відповідає рядку вхідного потоку й складається з кількості елементів рядка й власно рядка у вигляді індексів у палітрі кольорів пікселів, що складають рядок;
- порожній рядок, що є ознакою кінця словника;
- вектор палітри, що містить шістнадцяткові значення кольору в кодуванні RGB.

Інтерфейс користувача програми включає: кнопки “Запис”, “Читання”, рядок для введення значення розміру словника в байтах, радіогрупу для перемикання реальної глибини кольору оброблюваного зображення й компоненти для візуалізації зображень. Натиснення на кнопки породжує дії:

- “Запис” – розпакування файлу повнокольорового растрового зображення у форматі BMP, візуалізацію зображення та формування текстового файлу з растровими даними, стисненими за алгоритмом LZW у каталозі, що вказується користувачем;
- “Читання” – зчитування даних з раніше сформованого текстового файлу й повторну візуалізацію зображення.

4. Дослідити ефективність алгоритму стиснення LZW. Як тестові використовувати ті ж самі зображення, що й у п. 2. Результати дослідження представити у вигляді таблиці з назвою зображення, його об’ємом після стиснення і отриманого ступеня стиснення. Розмір словника прийняти таким, що становить $2^{4+(N_0 \bmod 9)}$ кодів.

5. Побудувати графіки залежності ступеня стиснення від розміру словника (16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096 кодів) для двох зображень згідно зі своїм варіантом (табл. 3.14).

6. Навести динаміку зміни вмісту буферного рядку, вихідного потоку, кількості записів у словнику та підсумкове дерево словника для вхідної послідовності згідно варіанту завдання (табл. 3.15).

Вимоги до звіту

Звіт повинен містити:

1. Назву дисципліни та лабораторної роботи.
2. Прізвище, ім’я та по батькові студента, шифр групи.
3. Об’єкт, предмет і мету лабораторної роботи.
4. Таблицю з параметрами зображень, стиснених за алгоритмом RLE.

5. Таблицю з параметрами зображень, стиснених за алгоритмом LZW при фіксованому розмірі словника.

6. Графіки залежності ступеня стиснення від розміру словника для двох зображень відповідно до свого варіанта.

7. Перші десять записів словника для будь-якого монохромного зображення, а також відповідні їм коди вихідного потоку.

8. Таблицю динаміки зміни вмісту буферного рядку, вихідного потоку, кількості записів у словнику та підсумкове дерево словника для вхідної послідовності згідно варіанту завдання.

9. Висновки.

Контрольні питання і завдання

1. Сформулюйте умову за якої послідовність дискретних повідомлень несе максимальну інформацію.

2. Наведіть основні характеристики алгоритмів стиснення даних.

3. Назвіть відомі алгоритми стиснення даних.

4. Назвіть основні параметри алгоритмів RLE і LZW.

5. Викладіть алгоритм стиснення LZW. Проілюструйте на прикладі процес формування словника й вихідного потоку.

6. Поясніть, з якої причини алгоритм RLE є ефективним для стиснення тільки монохромних зображень, а LZW – для зображень з глибиною кольору не більше 8 bpp.

7. Дано растрове монохромне зображення розміром $x \cdot y = 64 \cdot 64$ пікселів, що представляє собою рядки білих та чорних пікселів, які чергуються. Вважаючи, що значення коефіцієнта повторення кодується одним байтом, визначте ступень стиснення, яка може бути отримана для даного зображення за допомогою алгоритму LZW.

8. Для представлених на рис. 3.3 прикладів монохромних зображень, де кожна комірка таблиці символізує піксель растрового блоку, наведіть код, що формується у вихідному потоці алгоритмом стиснення RLE, і впорядкуйте зображення за ступенем стиснення.

W	W	W	W
W	W	W	W
K	K	K	K
K	K	K	K

а

W	W	K	K
W	W	K	K
W	W	K	K
W	W	K	K

б

W	W	W	W
K	K	K	K
K	K	K	K
W	W	W	W

в

W	W	W	W
K	K	K	K
W	W	W	W
В	В	В	В

г

K	K	K	K
W	K	K	K
W	W	K	K
W	W	W	W






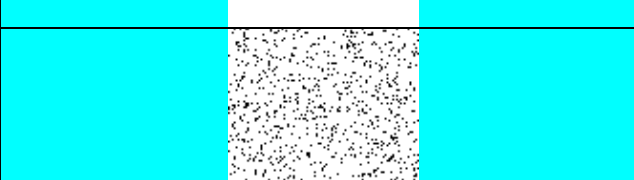
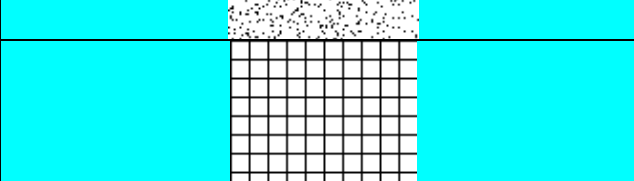


д

Рис. 3.3

9. Для наведених у попередньому завданні зображень надайте дерева словників і коди вихідних потоків, які формуються при стисненні за допомогою алгоритму LZW, вважаючи, що об'єм словника достатній для збереження кодів усіх формованих рядків.

10. Знайдіть розмір словника, що буде сформований внаслідок стиснення однокольорового зображення розміром $x \cdot y = 100 \cdot 100$ пікселів за алгоритмом LZW.

Таблиця 3.14

№ варіанта	Назва зображення	Вид зображення
1, 5, 10, 14, 19, 23, 28, 32	White	
2, 6, 11, 15, 20, 24, 29	Black_white	
3, 7, 12, 16, 21, 25, 30	White_black	
4, 8, 13, 17, 22, 26, 31	Diagonal	
5, 9, 14, 18, 23, 27, 32	Black_line	
1, 6, 10, 15, 19, 24, 28	Points	
2, 7, 11, 16, 20, 25, 29	Squares	
3, 8, 12, 17, 21, 26, 30	Rose_bw	
4, 9, 13, 18, 22, 27, 31	Rose_gray	

Варіанти вхідних послідовностей пікселів

№ варіанта	Вхідна послідовність пікселів
1	WWKKWWKKWWKK
2	RRGGBBRRGGBB
3	CCMMYYKKCMYK
4	WWWKKKWWKKK
5	RRRGGGBBBRRR
6	CCMYKCCMMYKCC
7	WWWKWWWKWWWK
8	RGGBBBRRGGBBB
9	CMMYYKCCMMYYK
10	WWKWWKWWKWWK
11	RRRRGBRGRRRR
12	CMMYKKCCMMYKK
13	WKKWWWKKWWW
14	RGBBGRRGBBGR
15	CMYKKYMCCMYK
16	KWWKKKWWWKKW
17	RGGRRGGRBBRB
18	CMKKYCMYKKKY
19	WKKWWWWWKWW
20	RBBRBBGGBBRB
21	CCCCMYKCMYK
22	WKWKKKKWKKKK
23	GBRRGBRRGGBB
24	CMYKCMYMYKMY
25	KWKWWKWKKKWW
26	RBGRGBRBGRGB
27	CMMMMYYKKCMY
28	KWKKKWWKKKWK
29	RRRGGBRRRGGB
30	CMYKYKCMCMCM
31	KWWKKKWWKWWK
32	RGRGRGBBBRGB

3.6. Вивчення методів перешкодостійкого кодування

Об'єкт – перешкодостійкі коди. Предмет – алгоритми складання і показники якості. Мета – отримання навичок складання кодів і визначення показників їх якості.

Теоретичні відомості – викладені у п. 2.7 – 2.10.

Постановка задачі

Дано: параметри перешкодостійких кодів та програмні реалізації імітації процесів кодування й декодування даних з використанням таких кодів.

Визначити: припустимі кодові комбінації перешкодостійких кодів та їх спроможність з виявлення та виправлення помилок.

Послідовність виконання роботи

1. Ознайомитися з інтерфейсом користувача й кодом пропонуваної програми codes.exe. Програма дозволяє імітувати процеси кодування й декодування даних з використанням описаних вище кодів, внесення помилок у канал передачі інформації, їхнього виявлення й виправлення.

2. Перейти в режим “Код – Код з перевіркою парності” і виконати наступні дії:

2.1. У вікно “Джерело” увести вихідні дані для кодування у вигляді довільних пар шістнадцяткових цифр. Зафіксувати режим “Перевірка парності за рядком”, виконати кодування – декодування й проаналізувати його результати, що відображаються у вікні “Передача”.

2.2. Повторити дії згідно з п. 2.1. При цьому імітувати помилки передачі, інвертуючи окремі розряди кодових слів. У різні рядки внести помилки кратності, що відповідають номеру рядка. Виконати декодування й проаналізувати його результати. Сформулювати висновки про можливості розпізнавання помилок для коду з перевіркою парності за рядком.

2.3. Виконати кодування в режимі “Перевірка парності за рядком і стовпцем” і проаналізувати його результати.

2.4. Повторити дії згідно з п. 2.3. При цьому імітувати однократну помилку передачі. Виконати декодування й виправлення помилки.

2.5. Повторити дії згідно з п. 2.3. При цьому імітувати двократну помилку передачі. Визначити закономірність у локалізації помилок, при якій вони не виявляються.

2.6. Сформулювати висновки про можливості виявлення й виправлення помилок для кодів з перевіркою парності за рядком і стовпцем.

3. Ознайомитися із правилами побудови перевірних співвідношень і виправлення помилок за допомогою коду Хеммінга для випадку $d_{\min} = 3$.

3.1. Для заданої перевірної матриці $M_{(9,4)}$, що наведена нижче, скласти таблицю синдромів коду Хеммінга $G_{(9,5)}$, співвідношення для визначення значень контрольних розрядів при кодуванні, та співвідношення для визначення розрядів синдрому помилки

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.2. Для інформаційної частини кодової комбінації, що відповідає молодшим п'яти розрядам двійкового представлення номеру варіанта №, визначити значення контрольних розрядів.

3.3. Внести помилку в розряд з номером $\text{№} \bmod 9 + 1$ і методом синдромів виправити її.

4. У програмі codes.exe перейти в режим “Код – Код Хеммінга” і виконати наступні дії:

4.1. У вікно “Джерело” послідовно ввести вихідні дані для кодування у вигляді всіляких шістнадцяткових цифр і одержати результати їхнього кодування.

4.2. Для кодової комбінації, що відповідає шістнадцятковій цифрі зі значенням $\text{№} \bmod 15 + 1$ імітувати однократну помилку в розряді з номером $\text{№} \bmod 7 + 1$ й виконати декодування з виправленням помилки.

5. Ознайомитися з правилами побудови перевірних співвідношень і кодування – декодування за допомогою ЛСК для випадку $d_{\min} = 3$.

5.1. Для заданої твірної матриці ЛСК $G_{(6,3)}$, що наведена нижче, визначити відповідну перевірну матрицю й записати перевірні співвідношення. Номер твірної матриці визначити як $\text{№} \bmod 6 + 1$.

$$\begin{aligned}
 & 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; 2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; 3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \\
 & 4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; 5) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; 6) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

5.2. Для значень інформаційних розрядів, котрі визначаються як двійковий еквівалент числа $\text{№} \bmod 7 + 1$, розрахувати значення контрольних розрядів.

5.3. Внести помилку в розряд з номером $\text{№} \bmod 3 + 1$ і виконати можливе виправлення значень інформаційних розрядів за принципом мажоритарного декодування.

6. Ознайомитися з правилами побудови припустимих кодових комбінацій і виявлення помилок за допомогою ЦК для випадку $d_{\min} = 3$.

6.1. Визначити твірну матрицю та дозволені комбінації ЦК $F_{(6,3)}$. За твірний вибрати багаточлен $P(x) = x^3 + x + 1$ для парних варіантів і $P(x) = x^3 + x^2 + 1$ – для непарних варіантів. Результати розрахунків представити у вигляді таблиці, в якій навести значення отриманих кодових комбінацій і номери рядків твірної матриці, що відповідають кодовим комбінаціям.

6.2. Для кодової комбінації, що відповідає рядку отриманої таблиці з номером $\text{№} \bmod 7 + 1$, внести помилку в розряд з номером $\text{№} \bmod 6 + 1$ і

переконалися в тім, що ця помилка виявляється при діленні алгебраїчного еквівалента кодової комбінації на твірний багаточлен.

6.3. виправити помилку за допомогою узагальненого алгоритма.

7. У програмі codes.exe перейти в режим “Код – Циклічний код”. За допомогою радіокнопки вибрати необхідний вид твірного багаточлена і виконати наступні дії:

7.1. У вікно “Джерело” послідовно ввести вхідні дані для кодування у вигляді всіляких шістнадцяткових цифр і одержати результати їхнього кодування.

7.2. Для даних у вигляді шістнадцяткової цифри з номером № mod 15 + 1 імітувати однократну помилку в розряді з номером № mod 7 + 1 кодової комбінації й виконати декодування з виправленням помилки.

7.3. Повторити дії згідно з п. 7.2. При цьому імітувати двократну помилку передачі. Зробити висновок щодо можливості виявлення двократних помилок за допомогою коду.

Вимоги до звіту

Звіт повинен містити:

2. Назву дисципліни та лабораторної роботи.
3. Прізвище, ім'я та по батькові студента, шифр групи.
4. Об'єкт, предмет і мету лабораторної роботи.
5. Копії вигляду екрана за п. 2.1 – 2.6 з підписаними підписами.
6. Висновки про можливість виявлення й виправлення помилок для кодів з перевіркою парності за рядком, а також за рядком і стовпцем.
7. Таблицю синдромів, співвідношення для визначення значень контрольних розрядів при кодуванні, та співвідношення для визначення розрядів синдрому помилки коду Хеммінга $G_{(9,5)}$.
8. Копію вигляду екрана за п. 4.2 з підписаним підписом.
9. Перевірну матрицю й перевірні співвідношення ЛСК $G_{(6,3)}$.
10. Розрахунки виправлення однократної помилки за принципом мажоритарного декодування для ЛСК $G_{(6,3)}$.
11. Розрахунок твірної матриці ЦК $F_{(6,3)}$ і таблицю його припустимих кодових комбінацій.
12. Результати ділення кодової комбінації ЦК на твірний багаточлен при однократній помилці.
13. Результати виправлення однократної помилки за допомогою ЦК $F_{(6,3)}$.
14. Копії вигляду екрана за п. 7.2, 7.3 з підписаними підписами.
15. Висновки про можливість розпізнавання помилок для ЦК $F_{(7,4)}$.

Основні контрольні питання і завдання – № 25 – 48 до розділу 2.

Додаткові контрольні питання і завдання

1. Наведіть структуру кодів з перевіркою парності, сформулюйте їхні можливості з виявлення і виправлення помилок.
2. Отримайте перевірну матрицю $M_{(9,4)}$ коду Хеммінга $G_{(9,5)}$.
3. Приведіть загальний вигляд формули обчислення контрольних розрядів ЛСК.

4. Опишіть метод мажоритарного декодування виправлення помилок за допомогою ЛСК.

5. Сформулюйте вимоги, яким задовольняють твірні багаточлени ЦК.

6. Викладіть методику побудови систематичного ЦК.

3.7. Визначення характеристик ПВП Хаффмана

Об'єкт – ПВП Хаффмана. Предмет – АКФ та амплітудний спектр ПВП.

Мета – експериментальне визначення.

Основні теоретичні відомості – викладені у п. 2.10.7.2.

Додаткові теоретичні відомості

Принциповою відмінністю ПВП від істинно випадкових є періодичність перших. Із зазначеного факту випливають і відповідні відмінності АКФ і спектрів таких послідовностей.

Розкладення в ряд Фур'є за тригонометричним базисом періодичної функції з періодом T_n має вигляд:

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T_n}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{T_n}\right) \right]; \quad a_0 = \frac{1}{T_n} \int_{-\frac{T_n}{2}}^{\frac{T_n}{2}} f(t) dt; \quad (3.19)$$

$$a_k = \frac{1}{T_n} \int_{-\frac{T_n}{2}}^{\frac{T_n}{2}} f(t) \cos\left(\frac{2\pi kt}{T_n}\right) dt; \quad b_k = \frac{1}{T_n} \int_{-\frac{T_n}{2}}^{\frac{T_n}{2}} f(t) \sin\left(\frac{2\pi kt}{T_n}\right) dt,$$

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{T_n} + \varphi_k\right); \quad (3.20)$$

$$A_0 = a_0; \quad A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}; \quad \varphi_k = \arctg\left(\frac{a_k}{b_k}\right),$$

де $\{A_k\}_{k=0, \dots, +\infty}$ – амплітудний, а $\{\varphi_k\}_{k=0, \dots, +\infty}$ – фазовий спектри періодичної функції.

На рис. 3.4 представлений амплітудний спектр ПВП з періодом в T_n і довжиною двійкового сигналу з $T_i = \frac{T_n}{N}$, де $N=7$, що відповідає АКФ, зображеній на рис. 2.11.

Постановка задачі

Дано: вектор початкової фази та примітивний багаточлен ПВП.

Визначити: АКФ і амплітудний спектр.

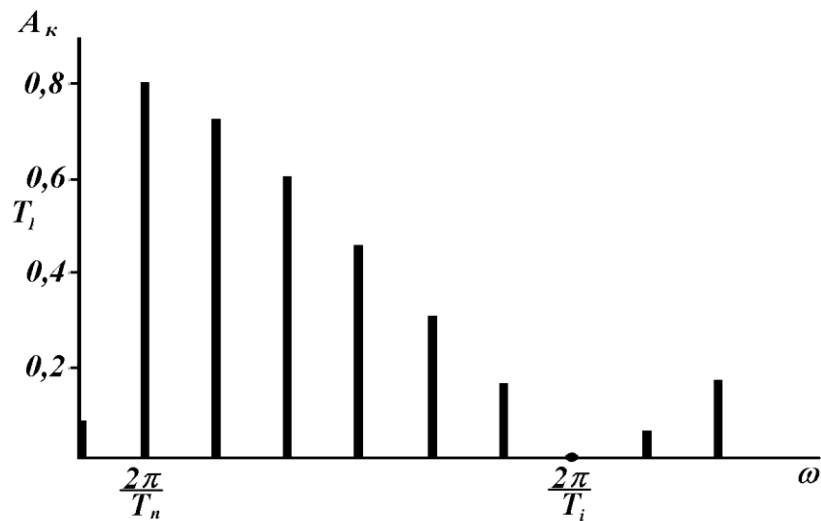


Рис. 3.4

Послідовність виконання роботи

Відповідно до номеру варіанту для заданого примітивного багаточлена згідно даних табл. 3.15, використовуючи середовище математичних розрахунків:

1. Згенерувати ПВП у межах одного періоду й побудувати графік її часової залежності.

Як вектор початкової фази прийняти двійкове представлення номера варіанта, при необхідності доповнивши відсутні старші розряди нулями.

2. Побудувати амплітудний спектр ПВП. З метою підвищення швидкодії програми при визначенні коефіцієнтів розкладення часової залежності послідовності в ряд Фур'є й подальшому обчисленні АКФ, інтеграли апроксимувати сумами

$$\int_a^b f(t)dt \approx \sum_{i=1}^N f(t_i)\Delta t, \quad t_i = \left[\frac{1}{2} + (i-1) \right] \Delta t, \quad i = 1, \dots, N$$

$$\Delta t = \frac{b-a}{N}, \quad N = 1000.$$

3. Періодично продовжити послідовність у діапазоні $[-2T_n, 2T_n]$.

4. Побудувати АКФ ПВП.

Вимоги до звіту

Звіт повинен містити:

1. Назву дисципліни та лабораторної роботи.
2. Прізвище, ім'я та по батькові студента, шифр групи.
3. Об'єкт, предмет і мету лабораторної роботи.
4. Вектор початкової фази і примітивний багаточлен відповідно до варіанта завдання.
5. Рекурентне співвідношення для визначення членів ПВП.
6. Код програми, що дозволяє генерувати ПВП у межах одного періоду.

7. Графіки часової залежності ПВП в межах одного періоду, її амплітудний спектр і АКФ.

8. Висновки.

Основні контрольні питання і завдання – № 54 – 63 до розділу 2.

Додаткові контрольні питання і завдання

1. Приведіть розкладення в ряд Фур'є за тригонометричним базисом періодичної функції.

2. Дайте визначення амплітудного та фазового спектрів періодичної функції.

3. Сформулюйте властивості примітивних багаточленів.

4. Сформулюйте властивості ПВП (М-послідовностей Хаффмана).

5. Наведіть рекурентне рівняння для визначення значення члена ПВП, що може бути породжена примітивним багаточленом.

6. Знайдіть рекурентне рівняння, за яким будуть визначатися елементи двійкової ПВП при твірному багаточлені x^4+x^2+1 . Знайдіть значення елементів періоду для початкової фази 1010. Побудуйте дискретну АКФ ПВП.

Таблиця 3.15

№ варіанта	Примітивний багаточлен
1, 22	$x^5+x^4+x^3+x^2+1$
2, 23	$x^5+x^4+x^3+x+1$
3, 24	$x^5+x^4+x^2+x+1$
4, 25	$x^5+x^3+x^2+x+1$
5, 26	x^5+x^3+1
6, 27	x^5+x^2+1
7, 28	$x^6+x^5+x^4+x+1$
8, 29	$x^6+x^5+x^3+x^2+1$
9, 30	$x^6+x^5+x^2+x+1$
10, 31	$x^6+x^4+x^3+x+1$
11, 32	x^6+x^5+1
12	x^6+x+1
13	$x^7+x^5+x^2+x+1$
14	$x^7+x^5+x^3+x+1$
15	$x^7+x^5+x^4+x^3+1$
16	$x^7+x^4+x^3+x^2+1$
17	$x^7+x^3+x^2+x+1$
18	x^7+x^6+1
19	x^7+x^4+1
20	x^7+x^3+1
21	x^7+x+1

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Кожевников В. Л. Основи збирання, обробки і передачі інформації. Теоретичні основи : навч. посіб. / В. Л. Кожевников, А. В. Кожевников ; М-во освіти і науки України, Нац. гірн. ун-т. – Дніпропетровськ : НГУ, 2007. – 108 с.
2. Мороз Б. І. Методи раціональної організації обробки інформації в системах передачі даних : навч. посіб. / Б. І. Мороз, В. П. Дюбко ; Держ. мит. служба України, Акад. мит. служби України. – Дніпропетровськ : АМСУ, 2007. – 251 с.
3. Жураковський, Ю. П. Теорія інформації та кодування : навч. посіб. / Ю. П. Жураковський, В. П. Полторак. – Київ : Вища школа, 2001. – 255 с.
4. Жураковський Ю. П. Теорія інформації та кодування в задачах : навч. посіб. / Ю. П. Жураковський, В. В. Гніліцький ; М-во освіти і науки України, Житом. інжен.-технолог. ін-т. – Житомир : ЖІТІ, 2002. – 230 с.
5. Коваленко А. Є. Теорія інформації і кодування [Електронний ресурс] : навч. посіб. / А. Є. Коваленко ; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т. Київ. політехн. ін-т. ім. Ігоря Сікорського. – Київ : КПІ ім. І. Сікорського, 2020. – 248 с.
6. Кузьмін І. В. Основи теорії інформації та кодування : навч. посіб. / І. В. Кузьмін, І. В. Троцишин, А. І. Кузьмін та ін. ; М-во освіти і науки України, Хмельн. нац. ун-т. – Хмельницький : ХмНУ, 2009. – 373 с
7. Подолевський Б. М. Теорія інформації в задачах : навч. посіб. / Б. М. Подолевський, Р. Є. Рикалюк. – Київ : Центр навчальної літератури, 2019. – 271 с.
8. Тулякова Н.О. Теорія інформації : навч. посіб. / Н. О. Тулякова ; М-во освіти і науки України, Сум. держ. ун-т. – Суми : СумДУ, 2010. – 248 с.
9. Сорока Л. С. Основи теорії інформації : навч. посіб. / Л. С. Сорока ; М-во освіти і науки України, Харк. нац. ун-т. ім. В. Н. Каразіна – Харків : ХНУ ім. В. Н. Каразіна, 2007. – 264 с.
10. Безруков В. В. Теорія інформації : навч. посіб. / В. В. Безруков, В. Я. Кізяков, В. І. Профатілов ; М-во освіти і науки України, Дніп. держ. техн. ун-т. залізн. трансп. – Дніпропетровськ : ДДТУЗТ, 2001. – 110 с.
11. Решетник В. Я. Введення в теорію інформації : навч. посіб. / В. Я. Решетник ; М-во освіти і науки України, Терн. держ. техн. ун-т. – Тернопіль: ТДТУ, 2002. – 130 с.
12. Курко А. М. Введення в теорію інформації [Електронний ресурс] : навч. посіб. / А. М. Курко, В. Я. Решетник. ; М-во освіти і науки України, Терн. нац. техн. ун-т. ім. Івана Пулюя. – Тернопіль : ТНТУ ім. І. Пулюя, 2017 – 108 с.
13. Кожевников В. Л. Методичні рекомендації і завдання до виконання лабораторних робіт з дисциплін “Теорія інформації і кодування” та “Основи збирання, передачі і обробки інформації” для напрямів підготовки 0501, 0502, 1701 / А. В. Кожевников, В. Л. Кожевников ; М-во освіти і науки України, Нац. гірн. ун-т. – Дніпропетровськ : НГУ, 2009. – 64 с.

14. Кожевников В. Л. Інформативність джерел двопозиційних повідомлень в системах телемеханіки / В. Л. Кожевников, А. В. Кожевников // Збірник наукових праць НГУ. – Дніпропетровськ, 2008. – № 30. – С. 112 – 117.

15. Дубина О. Ф. Алгоритм вибору завадостійких кодів для роботи систем радіозв'язку у короткохвильовому діапазоні / О. Ф. Дубина, Т. М. Нікітчук, І. Г. Коцюба // Вісник НТУУ «КПІ». – Київ, 2019. – Серія радіотехніка та радіоапаратобудування. – Вип. 77. – С. 47 – 52.

Закони розподілу випадкових величин

Д.1.1. Поняття випадкової величини

Випадковою величиною називається величина, що у результаті іспиту приймає те або інше числове значення, причому заздалегідь невідомо, яке саме.

Випадкові величини позначаються великими літерами латинського алфавіту – X , Y , прийняті ними значення – малими – x , y , а значення, які прийняли випадкові величини внаслідок іспитів (елементи виборок) – літерами грецького алфавіту – ξ , χ ,

Випадкова величина, що приймає кінцеву або зліченну множину значень: називається дискретною випадковою величиною.

Неперервною випадковою величиною називається випадкова величина, нескінченна незліченна множина можливих значень якої є деякий проміжок (кінцевої або нескінченний) числової осі.

Законом розподілу випадкової величини називається всяке співвідношення, що встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини й відповідними їм імовірностями.

Д.1.2. Диференціальна функція розподілу дискретної випадкової величини. Полігон розподілу

Закон розподілу може мати різні форми. Для дискретної випадкової величини закон розподілу може бути заданий у вигляді таблиці, аналітично (у вигляді формули) і графічно.

Найпростішою формою завдання закону розподілу дискретної випадкової величини ξ є таблиця (матриця), у якій у порядку зростання перераховані всі можливі значення випадкової величини й відповідні їхні імовірності, тобто

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix}, \text{ де } p_i = P(X = x_i); \sum_{i=1}^m p_i = 1. \quad (\text{д.1.1})$$

Така таблиця називається ранжованим рядом розподілу дискретної випадкової величини X . Тут m – кількість значень, які може приймати випадкова величина.

Графічне зображення ряду розподілу називається полігоном розподілу.

Дискретна функція залежності імовірності p_i прийняття випадковою величиною певного значення від цього значення x_i зветься теоретичною диференціальною функцією розподілу дискретної випадкової величини.

Якщо задана вибірка значень випадкової величини $\{\xi_j\}_{j=1, \dots, n}$, де n – кількість елементів або об'єм вибірки, можливо побудувати емпіричну

(експериментальну або статистичну) функцію розподілу. Для цього слід знайти величини частот $\{n_i\}_{i=1,\dots,m}$ прийняття випадковою величиною відповідних значень $\{x_i\}_{i=1,\dots,m}$, тобто кількість елементів вибірки, які дорівнюють цим значенням. Для частот виконується умова

$$\sum_{i=1}^m n_i = n. \quad (\text{д.1.2})$$

Нормування значень частот на об'єм вибірки дає значення відносних частот $w_i = \frac{n_i}{n}$ для яких, згідно попередньої рівності, виконується умова

$$\sum_{i=1}^m w_i = 1. \quad (\text{д.1.3})$$

Функція залежності відносної частоти w_i прийняття випадковою величиною певного значення від величини цього значення x_i зветься емпіричною диференціальною функцією розподілу дискретної випадкової величини. Оскільки згідно класичного визначення імовірності випадкової події

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_i = p_i, \quad (\text{д.1.4})$$

при необмеженому зростанні об'єму вибірки, емпірична функція розподілу буде наближатися до теоретичної.

Так, наприклад, випадковою величиною є кількість очок, яке випало при киданні кубіка. З урахуванням рівноймовірності виникнення будь-якого з $m = 6$ значень

$$p_i = p = \frac{1}{m} \quad (\text{д.1.5})$$

і ряд розподілу випадкової величини має вигляд

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

Нехай у результаті $n = 5$ іспитів отримана вибірка значень величини

$$\{\xi_j\}_{j=1,\dots,5} = \{3 \ 5 \ 1 \ 3 \ 6\}.$$

Тоді обчислення частот і відносних частот прийняття випадковою величиною можливих значень дає

$$\{n_i\}_{i=1,\dots,6} = \{1 \ 0 \ 2 \ 0 \ 1 \ 1\}, \quad \{w_i\}_{i=1,\dots,6} = \{1/5 \ 0 \ 2/5 \ 0 \ 1/5 \ 1/5\}.$$

Полігони теоретичної та емпіричної диференціальних функцій розподілу випадкової величини для прикладу, що розглядається приведені на рис. д.1.1. Теоретична функція підпорядковується дискретному рівномірному розподілу.

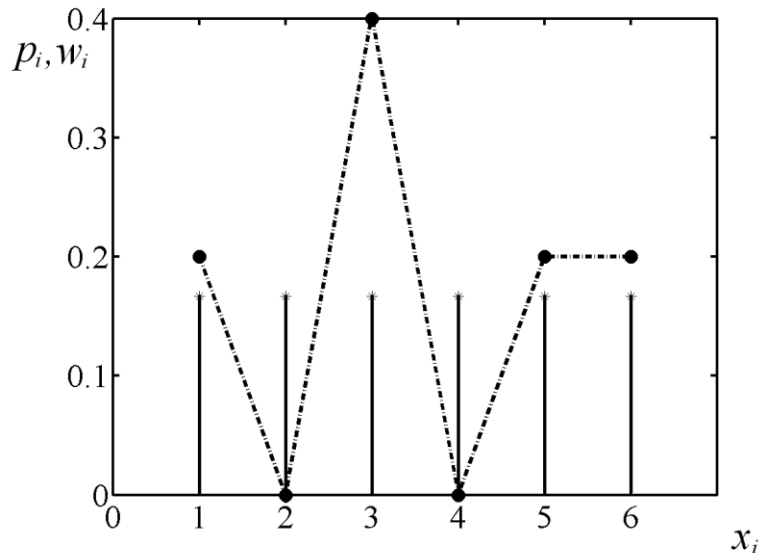


Рис. д.1.1

Д.1.3. Кумулятивна функція розподілу випадкової величини і її властивості

Одним з найбільш зручних і універсальних способів завдання закону розподілу випадкової величини X є функція розподілу.

Функцією розподілу імовірності (теоретичною кумулятивною або інтегральною функцією розподілу) випадкової величини X називається функція $F(x)$, що для будь-якого числа $x \in R$ дорівнює імовірності події, яка полягає в тому, що випадкова величина X прийме значення, не більше, ніж x , тобто $F(x) = P(X \leq x)$.

Геометрично функція розподілу інтерпретується як імовірність того, що випадкова точка X потрапить на числовій осі не праворуч по відношенню до заданої точки x . Функція $F(x)$ може бути визначена як для дискретних, так і неперервних випадкових величин.

Функція розподілу імовірності має наступні властивості:

1. $0 \leq F(x) \leq 1$;
2. $F(x)$ – неспадна функція, тобто $F(x_2) \geq F(x_1)$, якщо $x_2 > x_1$;
3. $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$;
4. $F(x)$ – неперервна праворуч у будь-якій точці x , тобто $F(x+0) = F(x)$, $x \in R$;
5. $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$.

Теоретична кумулятивна функція розподілу дискретної випадкової величини має вигляд

$$F_i = \sum_{x_k \leq x_i} P(X = x_k) = \sum_{x_k \leq x_i} p_k = p_i^H, \quad (\text{д.1.6})$$

де підсумовування ведеться по всіх індексах k , для яких $x_k \leq x_i$. Величини p_i^H зводяться накопиченими імовірностями і дорівнюють імовірностям того, що випадкова величина X прийме значення, яке не перевищує x_i .

Аналогічним чином визначається і емпірична кумулятивна функція розподілу дискретної випадкової величини, при цьому замість імовірностей беруться відносні частоти

$$F_i^* = \sum_{x_k \leq x_i} w_k = w_i^H. \quad (\text{д.1.7})$$

Для дискретної випадкової величини кумулятивні функції розподілу є дискретними неспадними функціями і графічно подаються у вигляді накопичених полігонів.

Для прикладу, що був розглянутий у п. д.1.2 накопичені імовірності та відносні частоти становлять

$$\begin{aligned} \{p_i^H\}_{i=1,\dots,6} &= \{1/6 \ 1/3 \ 1/2 \ 2/3 \ 5/6 \ 1\}; \\ \{w_i^H\}_{i=1,\dots,6} &= \{1/5 \ 1/5 \ 3/5 \ 3/5 \ 4/5 \ 1\}, \end{aligned}$$

а теоретична та емпірична кумулятивні функції розподілу випадкової величини приведені на рис. д.1.2.

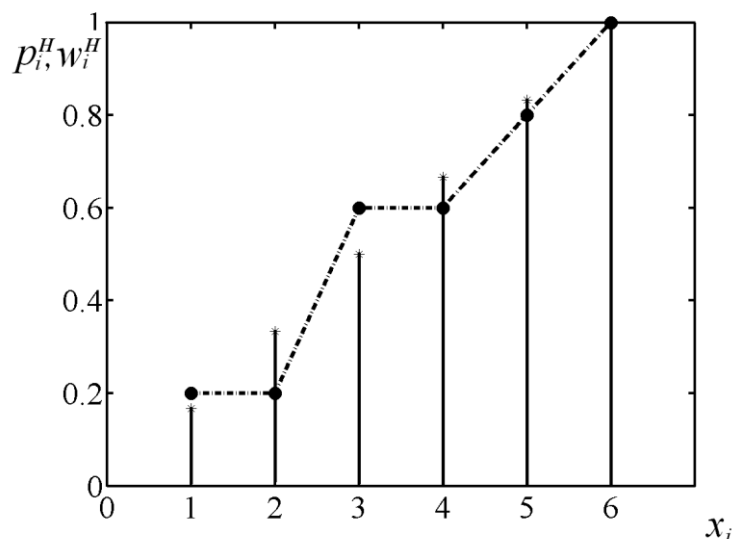


Рис. д.1.2

Д.1.4. Диференціальна функція розподілу неперервної випадкової величини і її властивості

За допомогою функції розподілу імовірності можна дати інше визначення неперервної випадкової величини. Випадкова величина X називається неперервною, якщо її функція розподілу неперервна в будь-якій точці й диференційована всюди, крім, бути може, окремих точок.

На відміну від дискретних випадкових величин імовірність появи певного значення для неперервної випадкової величини дорівнює нулю: $P(X = c) = 0, \forall c \in R$. Тому для неперервної випадкової величини X маємо

$$P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) \quad (\text{д.1.8})$$

Для неперервних випадкових величин крім функції розподілу імовірності закон розподілу може бути заданий за допомогою щільності імовірності. Нехай функція розподілу імовірності $F(x)$ даної неперервної випадкової величини X неперервна й диференційована всюди, крім, може бути, окремих крапок. Щільністю імовірності розподілу (теоретичною диференціальною функцією розподілу) неперервної випадкової величини X називається функція $w(x) = F'(x)$.

Щільність імовірності має наступні властивості:

1. $w(x) \geq 0$;
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} w(x) dx = 1$;
3. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} w(x) = 0$.

Функція розподілу імовірності $F(x)$ виражається через щільність розподілу формулою

$$F(x) = \int_{-\infty}^x w(x) dx. \quad (\text{д.1.9})$$

Імовірність влучення неперервної випадкової величини X в проміжок $(a, b]$ визначається співвідношенням

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b w(x) dx. \quad (\text{д.1.10})$$

Д.1.5. Емпірична функція розподілу неперервної випадкової величини. Гістограма розподілу

Теоретичні кумулятивна та диференціальна функція розподілу неперервної випадкової величини, які розглянуті у п. д.1.3, д.1.4 подаються у

вигляді звичайних графіків. Натомість їх емпіричні аналоги зображуються у вигляді стовпчастих графіків, що зветься гістограмами і будуються наступним чином.

Як було зазначено у п. д.1.4 імовірність появи певного значення для неперервної випадкової величини дорівнює нулю, тому має сенс говорити про імовірність потрапляння значення такої величини у певний інтервал. З одного боку, більшість поширених функцій розподілу випадкових величин визначені на нескінченних проміжках числової осі. З другого, з огляду на властивість 3 щільності імовірності, завжди можливо визначити проміжок зміни випадкової величини $[x_{min}, x_{max}]$ такий, що імовірністю потрапляння величини за його межі можна знехтувати. Наприклад, при виборі значень у вигляді

$$x_{min}=F^{-1}(0,001); x_{max}=F^{-1}(0,999),$$

де $F^{-1}(x)$ – інверсна (зворотна) теоретична кумулятивна функції розподілу випадкової величини, імовірність виходу величини за визначений проміжок складає 0,002. Проміжок зміни випадкової величини розбивається на m рівних інтервалів довжиною

$$\Delta = \frac{x_{max} - x_{min}}{m}. \quad (д.1.11)$$

Величина m не повинна бути з одного боку замалою, щоб запобігти усередненню функції розподілу по великому інтервалу і з іншого зовеликою – для усунення викривлень функції випадковими викидами. За звичай її значення розраховується за формулою Стержесса

$$m = [3,32 \lg(n)] + 1 = [1,44 \ln(n)] + 1. \quad (д.1.12)$$

де n – об'єм вибірки, а квадратні дужки символізують виділення цілої частини аргументу. Координати початку x_{min_i} , середини $\bar{x}_i = x_{min} + (i - 0,5)\Delta$ і кінця x_{max_i} інтервалу з номером i розраховуються за формулами

$$x_{min_i} = x_{min} + (i - 1)\Delta; \bar{x}_i = x_{min} + (i - 0,5)\Delta; x_{max_i} = x_{min} + i\Delta. \quad (д.1.13)$$

Підраховуються частоти $\{n_i\}_{i=1, \dots, m}$ потрапляння випадкової величини в кожний інтервал i , аналогічно випадку дискретної випадкової величини, як описано в п. д.1.2, д.1.3, обчислюються значення відповідних відносних $\{w_i\}_{i=1, \dots, m}$ і накопичених відносних $\{w_i^H\}_{i=1, \dots, m}$ частот потрапляння випадкової величини в відповідний інтервал.

Стовпчасті графіки залежностей величин $\frac{w_i}{\Delta}$ та w_i^H від значення випадкової величини x зводяться відповідно емпіричними диференціальною та кумулятивною функціями розподілу неперервної випадкової величини, або емпіричними щільністю імовірності та функцією розподілу імовірності. Такі графіки складаються з прямокутників з основами величиною Δ і зводяться гістограмами. Площа під гістограмою диференціальної функції розподілу завжди дорівнює одиниці

$$\sum_{i=1}^m \frac{w_i}{\Delta} \Delta = \sum_{i=1}^m w_i = 1, \quad (\text{д.1.14})$$

що відповідає властивості 2 щільності імовірності.

Побудування функцій розподілу неперервної випадкової величини розглянемо на прикладі вибірки з $n = 10$ випадкових чисел

$$\{\xi_j\}_{j=1,\dots,5} = \{0,486 \quad -0,005 \quad -0,276 \quad 1,277 \quad 1,863 \quad -0,523 \quad 0,103 \quad -0,808 \quad 0,680 \quad -2,365\},$$

які розподілені за нормальним законом з параметрами $\alpha = 0$ $\sigma = 1$. Теоретичні функції розподілу на визначаються виразами

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}; \quad F(x) = \frac{1}{2} + \Phi_0(x), \quad (\text{д.1.15})$$

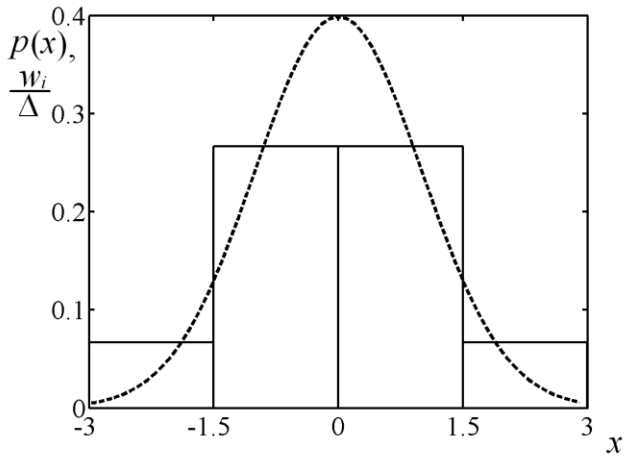
де $\Phi_0(x)$ – функція Лапласа.

Розрахунок величин, необхідних для побудування гістограм дає значення $x_{min} = F^{-1}(0,0135) = -3$; $x_{max} = F^{-1}(0,99865) = 3$; $m = 4$; $\Delta = 1,5$;

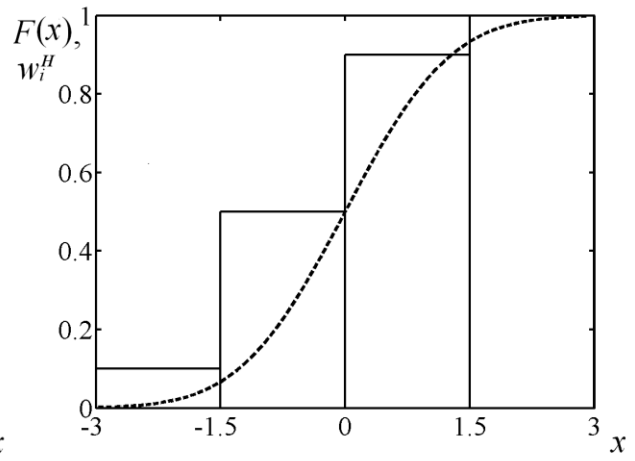
$$\left\{ \frac{w_i}{\Delta} \right\}_{i=1,\dots,6} = \{0,0667 \quad 0,2667 \quad 0,2667 \quad 0,0667 \}; \quad \{w_i^H\}_{i=1,\dots,6} = \{0,1 \quad 0,5 \quad 0,9 \quad 1\}.$$

Теоретична та емпірична диференціальні функції розподілу такої випадкової величини приведені на рис. д.1.3 а, а відповідні кумулятивні функції – на рис. д.1.3 б.

Для порівняння ті ж функції при кількостях інтервалів $m = 3$ та $m = 6$ приведені на рис. д.1.4 а, б та рис. д.1.5 а, б відповідно. Як було зазначено вище, площа під гістограмами емпіричних диференціальних функцій розподілу дорівнює одиниці незалежно від кількості m або величини Δ інтервалів.

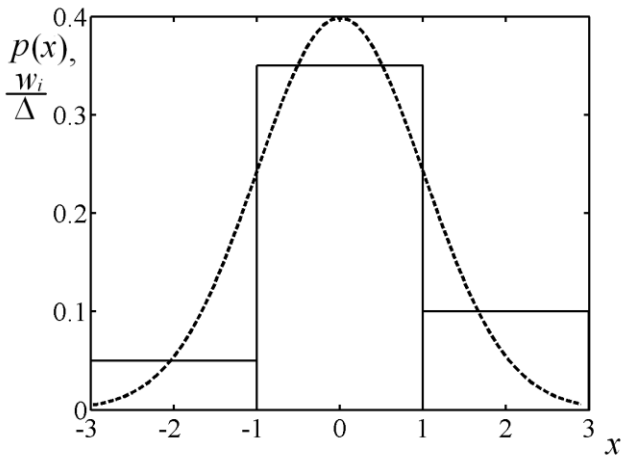


а)

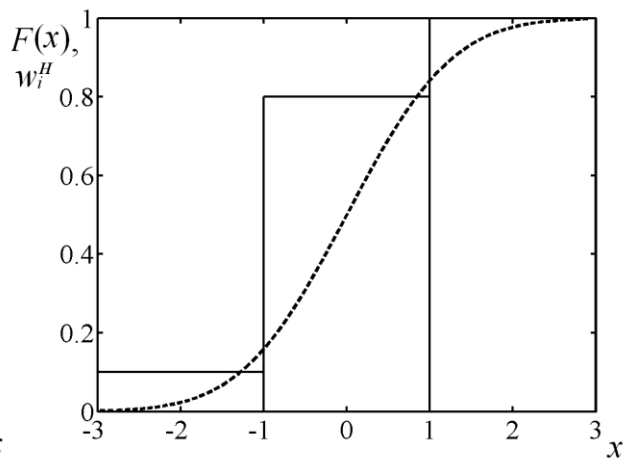


б)

Рис. д.1.3

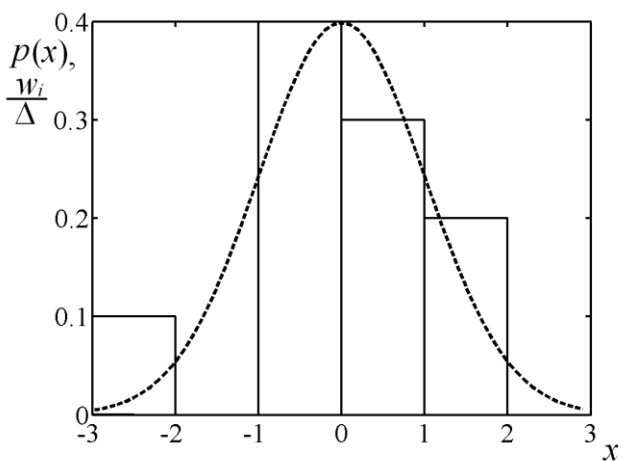


а)

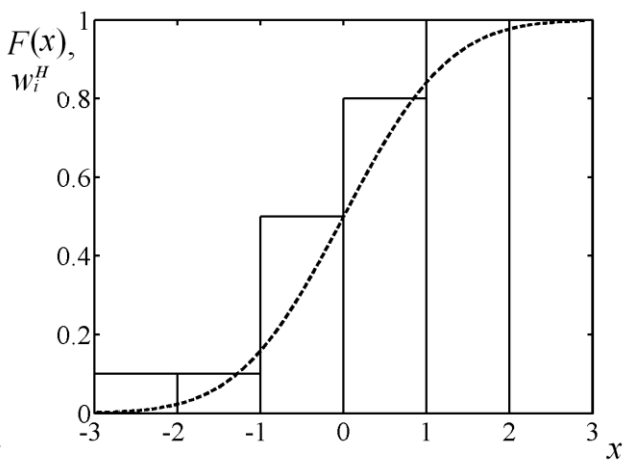


б)

Рис. д.1.4



а)



б)

Рис. д.1.5

Імовірності складних випадкових подій та умовні імовірності

Розглянемо множину складних випадкових подій $(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) = \{y_j, x_i\}_{\substack{j=1, \dots, n \\ i=1, \dots, m}}$, кожна з яких складається з двох простих $\mathbf{X} = \{x_i\}_{i=1, \dots, m}$ та $\mathbf{Y} = \{y_j\}_{j=1, \dots, n}$, що мають імовірності появи $P(\mathbf{X}) = \{p(x_i)\}_{i=1, \dots, m}$ та $P(\mathbf{Y}) = \{p(y_j)\}_{j=1, \dots, n}$ відповідно. Імовірність виникнення такої складної події визначається матрицею імовірностей складних випадкових подій, яка підпорядковується двовимірному закону розподілу $P(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) = \{p(y_j, x_i)\}_{\substack{j=1, \dots, n \\ i=1, \dots, m}}$, та має такі властивості:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p(y_j, x_i) &= 1; \\ \sum_{i=1}^m p(y_j, x_i) &= p(y_j), \quad P(\mathbf{Y}, \mathbf{X})^T \cdot \mathbf{1}_{(m,1)} = P(\mathbf{Y}); \\ \sum_{j=1}^n p(y_j, x_i) &= p(x_i), \quad P(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) \cdot \mathbf{1}_{(n,1)} = P(\mathbf{X}). \end{aligned} \quad (\text{д.2.1})$$

Тут $\mathbf{1}_{(m,1)}$ – вектор стовбець з m рядків елементами якого є одиниці. Події x_i та y_j можуть відбуватися одночасно або послідовно. У останньому випадку будемо вважати, що подія x_i виникає раніше. Імовірність виникнення складних подій може бути записана як

$$p(y_j, x_i) = p(y_j / x_i) \cdot p(x_i), \quad p(x_i, y_j) = p(x_i / y_j) \cdot p(y_j), \quad (\text{д.2.2})$$

де $p(y_j / x_i)$, $p(x_i / y_j)$ – відповідно умовні імовірності виникнення події y_j за умови виникнення x_i та події x_i за умови виникнення y_j відповідно. Якщо прості події, що входять до складної, статистично незалежні, то умовні імовірності виникнення подій дорівнюють безумовним і, як наслідок, імовірність виникнення складної події дорівнює добутку безумовних імовірностей виникнення простих подій, з яких вона складається. Якщо ж одна з простих подій, що входить до складної, обов'язково виникає внаслідок іншої (тобто є повністю залежною), то імовірність виникнення складної події дорівнює безумовній імовірності виникнення останньої простої події.

При виконанні умови

$$\begin{aligned} p(y_j, x_i) &= p(x_i, y_j), \quad P(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) = P(\mathbf{X}, \mathbf{Y})^T; \\ p(y_j / x_i) \cdot p(x_i) &= p(x_i / y_j) \cdot p(y_j), \end{aligned} \quad (\text{д.2.3})$$

будемо звати події (x_i, y_j) та (y_j, x_i) симетричними. Якщо події x_i та y_j статистично незалежні, то події (x_i, y_j) та (y_j, x_i) є симетричними. Прикладами статистично незалежних та симетричних подій є наслідки кидання двох кубиків. Тут $\mathbf{X} = \{x_i\}_{i=1, \dots, 6}$ та $\mathbf{Y} = \{y_j\}_{j=1, \dots, 6}$ – події, які полягають у випаденні певного числа очок на першому та другому кубіку. Прикладами несиметричних подій є виникнення двох літерних сполучень (біграм) у тексті, оскільки імовірність виникнення біграм суттєво залежить від порядку проходження літер. Так у українській мові біграма ай відносно розповсюджена, а біграма є забороненою.

Для кожного рядка матриці умовних імовірностей $\{p(y_j / x_i)\}_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$ виконується умова:

$$\sum_{j=1}^n p(y_j / x_i) = 1. \quad (\text{д.2.4})$$

Якщо події $\{y_j\}_{j=1, \dots, n}$ повністю залежні від подій $\{x_i\}_{i=1, \dots, m}$, один з елементів кожного рядка матриці $\{p(y_j / x_i)\}_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$ буде дорівнювати 1, а решта елементів цього рядка – 0.

Згідно формули повної імовірності

$$\begin{aligned} p(y_j) &= \sum_{i=1}^m p(y_j / x_i) \cdot p(x_i), & P(\mathbf{Y}) &= P(\mathbf{Y} / \mathbf{X})^T \cdot P(\mathbf{X}); \\ p(x_i) &= \sum_{j=1}^n p(x_i / y_j) \cdot p(y_j), & P(\mathbf{X}) &= P(\mathbf{X} / \mathbf{Y})^T \cdot P(\mathbf{Y}). \end{aligned} \quad (\text{д.2.5})$$

У якості прикладу розглянемо матрицею імовірностей складних випадкових подій $P(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) = \{p(y_j, x_i)\}_{\substack{i=1, \dots, 6 \\ j=1, \dots, 2}}$ де, $\mathbf{X} = \{x_i\}_{i=1, \dots, 6}$ – випадіння певного числа очок на кубіку внаслідок його кидання, а $\mathbf{Y} = \{y_j\}_{j=1, \dots, 2}$ – випадіння непарного чи парного числа очок на ньому. При цьому друга подія є повністю залежною від першої. Імовірності складних подій (x_i, y_j) та (y_j, x_i) збігаються з імовірностями простих (x_i) , які входять до їх складу. Відповідно, вказані складні події є симетричними.

Визначимо $P(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, $P(\mathbf{X})$, $P(\mathbf{Y})$, $P(\mathbf{Y} / \mathbf{X})$, $P(\mathbf{X} / \mathbf{Y})$. і перевіримо виконання формули повної імовірності.

$$P(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) = \begin{pmatrix} 1/6 & 0 \\ 0 & 1/6 \\ 1/6 & 0 \\ 0 & 1/6 \\ 1/6 & 0 \\ 0 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

$$P(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = P(\mathbf{Y}, \mathbf{X})^T = \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 1/6 & 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 1/6 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

$$P(\mathbf{Y}) = P(\mathbf{Y}, \mathbf{X})^T \cdot \mathbf{1}_{(m,1)} = \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 1/6 & 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 1/6 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

$$P(\mathbf{X}) = P(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) \cdot \mathbf{1}_{(n,1)} = \begin{pmatrix} 1/6 & 0 \\ 0 & 1/6 \\ 1/6 & 0 \\ 0 & 1/6 \\ 1/6 & 0 \\ 0 & 1/6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/6 \\ 1/6 \\ 1/6 \\ 1/6 \\ 1/6 \end{pmatrix}.$$

$$P(\mathbf{Y}/\mathbf{X}) = \left\{ \frac{p(y_j, x_i)}{p(x_i)} \right\}_{\substack{i=1, \dots, 6 \\ j=1, \dots, 2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$P(\mathbf{X}/\mathbf{Y}) = \left\{ \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)} \right\}_{\substack{j=1, \dots, 2 \\ i=1, \dots, 6}} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

$$P(\mathbf{Y}) = P(\mathbf{Y}/\mathbf{X})^T \cdot P(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/6 \\ 1/6 \\ 1/6 \\ 1/6 \\ 1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

$$P(\mathbf{X}) = P(\mathbf{X}/\mathbf{Y})^T \cdot P(\mathbf{Y}) = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/6 \\ 1/6 \\ 1/6 \\ 1/6 \\ 1/6 \end{pmatrix}.$$

ДОДАТОК 3

Таблиця д.3.1

Таблиця значень часткової ентропії $H = -p \cdot \log p$

p	Тисячні долі									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,0000	0,0100	0,0179	0,0251	0,0319	0,0382	0,0443	0,0501	0,0557	0,0612
0,01	0,0664	0,0716	0,0766	0,0814	0,0862	0,0909	0,0955	0,0999	0,1043	0,1086
0,02	0,1129	0,1170	0,1211	0,1252	0,1291	0,1330	0,1369	0,1407	0,1444	0,1481
0,03	0,1518	0,1554	0,1589	0,1624	0,1659	0,1693	0,1727	0,1760	0,1793	0,1825
0,04	0,1858	0,1889	0,1921	0,1952	0,1983	0,2013	0,2043	0,2073	0,2103	0,2132
0,05	0,2161	0,2190	0,2218	0,2246	0,2274	0,2301	0,2329	0,2356	0,2383	0,2409
0,06	0,2435	0,2461	0,2487	0,2513	0,2538	0,2563	0,2588	0,2613	0,2637	0,2662
0,07	0,2686	0,2709	0,2733	0,2756	0,2780	0,2803	0,2826	0,2848	0,2871	0,2893
0,08	0,2915	0,2937	0,2959	0,2980	0,3002	0,3023	0,3044	0,3065	0,3086	0,3106
0,09	0,3127	0,3147	0,3167	0,3187	0,3207	0,3226	0,3246	0,3265	0,3284	0,3303
0,1	0,3322	0,3341	0,3359	0,3378	0,3396	0,3414	0,3432	0,3450	0,3468	0,3485
0,11	0,3503	0,3520	0,3537	0,3555	0,3571	0,3588	0,3605	0,3622	0,3638	0,3654
0,12	0,3671	0,3687	0,3703	0,3719	0,3734	0,3750	0,3766	0,3781	0,3796	0,3811
0,13	0,3826	0,3841	0,3856	0,3871	0,3886	0,3900	0,3915	0,3929	0,3943	0,3957
0,14	0,3971	0,3985	0,3999	0,4012	0,4026	0,4040	0,4053	0,4066	0,4079	0,4092
0,15	0,4105	0,4118	0,4131	0,4144	0,4156	0,4169	0,4181	0,4194	0,4206	0,4218
0,16	0,4230	0,4242	0,4254	0,4266	0,4278	0,4289	0,4301	0,4312	0,4323	0,4335
0,17	0,4346	0,4357	0,4368	0,4379	0,4390	0,4401	0,4411	0,4422	0,4432	0,4443
0,18	0,4453	0,4463	0,4474	0,4484	0,4494	0,4504	0,4514	0,4523	0,4533	0,4543
0,19	0,4552	0,4562	0,4571	0,4581	0,4590	0,4599	0,4608	0,4617	0,4626	0,4635
0,2	0,4644	0,4653	0,4661	0,4670	0,4678	0,4687	0,4695	0,4704	0,4712	0,4720
0,21	0,4728	0,4736	0,4744	0,4752	0,4760	0,4768	0,4776	0,4783	0,4791	0,4798
0,22	0,4806	0,4813	0,4820	0,4828	0,4835	0,4842	0,4849	0,4856	0,4863	0,4870
0,23	0,4877	0,4883	0,4890	0,4897	0,4903	0,4910	0,4916	0,4923	0,4929	0,4935
0,24	0,4941	0,4947	0,4954	0,4960	0,4966	0,4971	0,4977	0,4983	0,4989	0,4994
0,25	0,5000	0,5006	0,5011	0,5016	0,5022	0,5027	0,5032	0,5038	0,5043	0,5048
0,26	0,5053	0,5058	0,5063	0,5068	0,5072	0,5077	0,5082	0,5087	0,5091	0,5096
0,27	0,5100	0,5105	0,5109	0,5113	0,5118	0,5122	0,5126	0,5130	0,5134	0,5138
0,28	0,5142	0,5146	0,5150	0,5154	0,5158	0,5161	0,5165	0,5169	0,5172	0,5176
0,29	0,5179	0,5182	0,5186	0,5189	0,5192	0,5196	0,5199	0,5202	0,5205	0,5208
0,3	0,5211	0,5214	0,5217	0,5220	0,5222	0,5225	0,5228	0,5230	0,5233	0,5235
0,31	0,5238	0,5240	0,5243	0,5245	0,5247	0,5250	0,5252	0,5254	0,5256	0,5258
0,32	0,5260	0,5262	0,5264	0,5266	0,5268	0,5270	0,5272	0,5273	0,5275	0,5277
0,33	0,5278	0,5280	0,5281	0,5283	0,5284	0,5286	0,5287	0,5288	0,5289	0,5291
0,34	0,5292	0,5293	0,5294	0,5295	0,5296	0,5297	0,5298	0,5299	0,5299	0,5300
0,35	0,5301	0,5302	0,5302	0,5303	0,5304	0,5304	0,5305	0,5305	0,5305	0,5306
0,36	0,5306	0,5306	0,5307	0,5307	0,5307	0,5307	0,5307	0,5307	0,5307	0,5307
0,37	0,5307	0,5307	0,5307	0,5307	0,5307	0,5306	0,5306	0,5306	0,5305	0,5305

<i>p</i>	Тисячні долі									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,38	0,5305	0,5304	0,5304	0,5303	0,5302	0,5302	0,5301	0,5300	0,5300	0,5299
0,39	0,5298	0,5297	0,5296	0,5295	0,5294	0,5293	0,5292	0,5291	0,5290	0,5289
0,4	0,5288	0,5286	0,5285	0,5284	0,5283	0,5281	0,5280	0,5278	0,5277	0,5275
0,41	0,5274	0,5272	0,5271	0,5269	0,5267	0,5266	0,5264	0,5262	0,5260	0,5258
0,42	0,5256	0,5255	0,5253	0,5251	0,5249	0,5246	0,5244	0,5242	0,5240	0,5238
0,43	0,5236	0,5233	0,5231	0,5229	0,5226	0,5224	0,5222	0,5219	0,5217	0,5214
0,44	0,5211	0,5209	0,5206	0,5204	0,5201	0,5198	0,5195	0,5193	0,5190	0,5187
0,45	0,5184	0,5181	0,5178	0,5175	0,5172	0,5169	0,5166	0,5163	0,5160	0,5157
0,46	0,5153	0,5150	0,5147	0,5144	0,5140	0,5137	0,5133	0,5130	0,5127	0,5123
0,47	0,5120	0,5116	0,5112	0,5109	0,5105	0,5102	0,5098	0,5094	0,5090	0,5087
0,48	0,5083	0,5079	0,5075	0,5071	0,5067	0,5063	0,5059	0,5055	0,5051	0,5047
0,49	0,5043	0,5039	0,5034	0,5030	0,5026	0,5022	0,5017	0,5013	0,5009	0,5004
0,5	0,5000	0,4996	0,4991	0,4987	0,4982	0,4978	0,4973	0,4968	0,4964	0,4959
0,51	0,4954	0,4950	0,4945	0,4940	0,4935	0,4930	0,4926	0,4921	0,4916	0,4911
0,52	0,4906	0,4901	0,4896	0,4891	0,4886	0,4880	0,4875	0,4870	0,4865	0,4860
0,53	0,4854	0,4849	0,4844	0,4839	0,4833	0,4828	0,4822	0,4817	0,4811	0,4806
0,54	0,4800	0,4795	0,4789	0,4784	0,4778	0,4772	0,4767	0,4761	0,4755	0,4750
0,55	0,4744	0,4738	0,4732	0,4726	0,4720	0,4714	0,4708	0,4702	0,4696	0,4690
0,56	0,4684	0,4678	0,4672	0,4666	0,4660	0,4654	0,4648	0,4641	0,4635	0,4629
0,57	0,4623	0,4616	0,4610	0,4603	0,4597	0,4591	0,4584	0,4578	0,4571	0,4565
0,58	0,4558	0,4551	0,4545	0,4538	0,4532	0,4525	0,4518	0,4511	0,4505	0,4498
0,59	0,4491	0,4484	0,4477	0,4471	0,4464	0,4457	0,4450	0,4443	0,4436	0,4429
0,6	0,4422	0,4415	0,4408	0,4401	0,4393	0,4386	0,4379	0,4372	0,4365	0,4357
0,61	0,4350	0,4343	0,4335	0,4328	0,4321	0,4313	0,4306	0,4298	0,4291	0,4283
0,62	0,4276	0,4268	0,4261	0,4253	0,4246	0,4238	0,4230	0,4223	0,4215	0,4207
0,63	0,4199	0,4192	0,4184	0,4176	0,4168	0,4160	0,4152	0,4145	0,4137	0,4129
0,64	0,4121	0,4113	0,4105	0,4097	0,4089	0,4080	0,4072	0,4064	0,4056	0,4048
0,65	0,4040	0,4031	0,4023	0,4015	0,4007	0,3998	0,3990	0,3982	0,3973	0,3965
0,66	0,3956	0,3948	0,3940	0,3931	0,3923	0,3914	0,3905	0,3897	0,3888	0,3880
0,67	0,3871	0,3862	0,3854	0,3845	0,3836	0,3828	0,3819	0,3810	0,3801	0,3792
0,68	0,3783	0,3775	0,3766	0,3757	0,3748	0,3739	0,3730	0,3721	0,3712	0,3703
0,69	0,3694	0,3685	0,3676	0,3666	0,3657	0,3648	0,3639	0,3630	0,3621	0,3611
0,7	0,3602	0,3593	0,3583	0,3574	0,3565	0,3555	0,3546	0,3537	0,3527	0,3518
0,71	0,3508	0,3499	0,3489	0,3480	0,3470	0,3460	0,3451	0,3441	0,3432	0,3422
0,72	0,3412	0,3403	0,3393	0,3383	0,3373	0,3364	0,3354	0,3344	0,3334	0,3324
0,73	0,3314	0,3305	0,3295	0,3285	0,3275	0,3265	0,3255	0,3245	0,3235	0,3225
0,74	0,3215	0,3204	0,3194	0,3184	0,3174	0,3164	0,3154	0,3144	0,3133	0,3123
0,75	0,3113	0,3102	0,3092	0,3082	0,3072	0,3061	0,3051	0,3040	0,3030	0,3020
0,76	0,3009	0,2999	0,2988	0,2978	0,2967	0,2956	0,2946	0,2935	0,2925	0,2914
0,77	0,2903	0,2893	0,2882	0,2871	0,2861	0,2850	0,2839	0,2828	0,2818	0,2807
0,78	0,2796	0,2785	0,2774	0,2763	0,2752	0,2741	0,2731	0,2720	0,2709	0,2698
0,79	0,2687	0,2676	0,2665	0,2653	0,2642	0,2631	0,2620	0,2609	0,2598	0,2587

<i>p</i>	Тисячні долі									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,8	0,2575	0,2564	0,2553	0,2542	0,2530	0,2519	0,2508	0,2497	0,2485	0,2474
0,81	0,2462	0,2451	0,2440	0,2428	0,2417	0,2405	0,2394	0,2382	0,2371	0,2359
0,82	0,2348	0,2336	0,2325	0,2313	0,2301	0,2290	0,2278	0,2266	0,2255	0,2243
0,83	0,2231	0,2219	0,2208	0,2196	0,2184	0,2172	0,2160	0,2149	0,2137	0,2125
0,84	0,2113	0,2101	0,2089	0,2077	0,2065	0,2053	0,2041	0,2029	0,2017	0,2005
0,85	0,1993	0,1981	0,1969	0,1957	0,1944	0,1932	0,1920	0,1908	0,1896	0,1884
0,86	0,1871	0,1859	0,1847	0,1834	0,1822	0,1810	0,1797	0,1785	0,1773	0,1760
0,87	0,1748	0,1736	0,1723	0,1711	0,1698	0,1686	0,1673	0,1661	0,1648	0,1636
0,88	0,1623	0,1610	0,1598	0,1585	0,1572	0,1560	0,1547	0,1534	0,1522	0,1509
0,89	0,1496	0,1484	0,1471	0,1458	0,1445	0,1432	0,1420	0,1407	0,1394	0,1381
0,9	0,1368	0,1355	0,1342	0,1329	0,1316	0,1303	0,1290	0,1277	0,1264	0,1251
0,91	0,1238	0,1225	0,1212	0,1199	0,1186	0,1173	0,1159	0,1146	0,1133	0,1120
0,92	0,1107	0,1093	0,1080	0,1067	0,1054	0,1040	0,1027	0,1014	0,1000	0,0987
0,93	0,0974	0,0960	0,0947	0,0933	0,0920	0,0907	0,0893	0,0880	0,0866	0,0853
0,94	0,0839	0,0826	0,0812	0,0798	0,0785	0,0771	0,0758	0,0744	0,0730	0,0717
0,95	0,0703	0,0689	0,0676	0,0662	0,0648	0,0634	0,0621	0,0607	0,0593	0,0579
0,96	0,0565	0,0552	0,0538	0,0524	0,0510	0,0496	0,0482	0,0468	0,0454	0,0440
0,97	0,0426	0,0412	0,0398	0,0384	0,0370	0,0356	0,0342	0,0328	0,0314	0,0300
0,98	0,0286	0,0271	0,0257	0,0243	0,0229	0,0215	0,0201	0,0186	0,0172	0,0158
0,99	0,0144	0,0129	0,0115	0,0101	0,0086	0,0072	0,0058	0,0043	0,0029	0,0014

Фрагмент таблиці незвідних багаточленів

μ	$P(x)$	$n = 2^\mu - 1$
1	$x+1^*$	1
2	x^2+x+1^*	3
3	x^3+x+1^* $x^3+x^2+1^*$	7
4	x^4+x+1^* $x^4+x^2+1^*$ $x^4+x^3+x^2+x+1$	15
5	$x^5+x^2+1^*$ $x^5+x^3+1^*$ $x^5+x^3+x^2+x+1^*$ $x^5+x^4+x^2+x+1^*$ $x^5+x^4+x^3+x+1^*$ $x^5+x^4+x^3+x^2+1^*$	31
6	x^6+x+1^* x^6+x^3+1 $x^6+x^5+1^*$ $x^6+x^4+x^2+x+1$ $x^6+x^4+x^3+x+1^*$ $x^6+x^5+x^2+x+1^*$ $x^6+x^5+x^3+x^2+1^*$ $x^6+x^5+x^4+x+1^*$ $x^6+x^5+x^4+x^2+1$	63
7	x^7+x+1^* $x^7+x^3+1^*$ $x^7+x^4+1^*$ $x^7+x^6+1^*$ $x^7+x^3+x^2+x+1^*$ $x^7+x^4+x^3+x^2+1^*$ $x^7+x^5+x^2+x+1^*$ $x^7+x^5+x^3+x+1^*$ $x^7+x^5+x^4+x^3+1^*$	127
8	$x^8+x^4+x^3+x^2+1^*$ $x^8+x^6+x^5+x^4+1^*$	255
9	$x^9+x^4+1^*$ $x^9+x^5+1^*$	511
10	$x^{10}+x^3+1^*$ $x^{10}+x^7+1^*$	1023

*) – примітивні багаточлени.

Однобальні тести для контролю залишкових знань з дисципліни

В наведених тестах лише одна відповідь на кожне питання є правильною

1. Функція залежності ентропії повідомлення від його імовірності є:
 - 1) лінійною
 - 2) гіперболічною
 - 3) експоненційною
 - 4) логарифмічною
1. Величина, яка не є одиницею виміру об'єму інформації:
 - 1) байт
 - 2) бод
 - 3) ніт
 - 4) діт
2. З урни, в якій міститься 20 білих, по 15 червоних та синіх, та 10 чорних куль, вилучається одна. Найменшу інформацію несе повідомлення, що вилучена куля має колір:
 - 1) чорний
 - 2) білий
 - 3) червоний або синій
 - 4) червоний
3. З урни, в якій міститься 20 білих, по 15 червоних та синіх, та 10 чорних куль, вилучається одна. Найбільшу інформацію несе повідомлення, що вилучена куля має колір:
 - 1) чорний
 - 2) білий
 - 3) червоний або синій
 - 4) червоний
4. З преферансної колоди, в якій міститься 32 карти, вилучається одна. Максимальна кількість бітів інформації, яку несе відповідь «так» чи «ні» на питання про те, що вилучена карта є піковим тузом, складає:
 - 1) 1
 - 2) 2
 - 3) 3
 - 4) 5
5. Кількість інформації повідомлення про те, що у грі «морський бій» з полем 10×10 кліток влучення в чотирипалубний корабель відбулося на першому ході, дорівнює в бітах:
 - 1) 1,40
 - 2) 3,22
 - 3) 4,64
 - 4) 5,64
6. З гармати здійснюється два незалежних постріли. Імовірність влучення в ціль при одному пострілі дорівнює p . Кількість інформації про те, що в ціль влучено хоча б одним пострілом, складає:
 - 1) $-\log p$
 - 2) $-\log(1-p)$
 - 3) $-\log[p(2-p)]$
 - 4) $-\log[2p(1-p)]$
7. З гармати здійснюється два незалежних постріли. Імовірність влучення в ціль при одному пострілі дорівнює p . Кількість інформації про те, що в ціль влучено рівно одним пострілом, складає:
 - 1) $-\log p$
 - 2) $-\log(1-p)$
 - 3) $-\log[p(2-p)]$
 - 4) $-\log[2p(1-p)]$
8. Проводиться послідовність незалежних випробувань. Імовірність появи події A при одному випробуванні складає p . Проведено k випробувань. Кількість інформації повідомлення про те, що в останньому іспиті мала місце подія A , якщо іспити проводяться до першої появи події A , тобто подія виникла у останньому випробуванні, складає:
 - 1) $-\log[p(1-p)^{k-1}]$
 - 2) $-\log p$
 - 3) $-\log[p^{k-1}(1-p)]$
 - 4) $-\log(1-p)$
9. Проводиться послідовність незалежних випробувань. Імовірність появи події A при одному випробуванні складає p . Проведено k випробувань. Кількість інформації повідомлення про те, що в останньому іспиті мала місце подія A , якщо іспити проводяться незалежно від появи події, складає:
 - 1) $-\log[p(1-p)^{k-1}]$
 - 2) $-\log p$
 - 3) $-\log[p^{k-1}(1-p)]$
 - 4) $-\log(1-p)$

10. Повідомлення i з імовірностями $\{p_i\}_{i=1,\dots,m}$ джерела, середня питома ентропія якого визначається виразом $H = -\sum_{i=1}^m p_i \log p_i$, не повинні задовільняти умові:

- 1) дискретності
- 2) неперервності
- 3) несумісності
- 4) статистичної незалежності

11. Середня питома ентропія джерела дискретних повідомлень може приймати множину значень:

- 1) $[0;1]$
- 2) $[0;+\infty)$
- 3) $(-\infty;+\infty)$
- 4) $[1;+\infty)$

12. Максимум часткової ентропії повідомлення досягається при його імовірності:

- 1) 0,36
- 2) 0,44
- 3) 0,5
- 4) 1

13. Ентропія джерела дискретних повідомлень є максимальною, якщо імовірності повідомлень підпорядковуються розподілу:

- 1) рівномірному
- 2) біномному
- 3) геометричному
- 4) Пуассона

14. Ентропія джерела N повідомлень дорівнює $\log N$, якщо імовірності повідомлень підпорядковуються розподілу:

- 1) рівномірному
- 2) біномному
- 3) геометричному
- 4) Пуассона

15. Джерело X генерує повідомлення $\{x_i\}_{i=1,\dots,n} = \frac{1}{i}$ з імовірностями

$\{p_i\}_{i=1,\dots,n} = \frac{1}{n}$, а джерело Y – повідомлення $\{y_i\}_{i=1,\dots,n} = i$ з тими самими імовірностями. Ентропії джерел та Y співвідносяться таким чином:

- 1) однакові
- 2) у джерела X менше
- 3) у джерела X більше
- 4) у джерела X може бути як менше, так і більше в залежності від значення n

16. Джерело X генерує повідомлення $\{x_i\}_{i=1,\dots,n} = i$ з імовірностями

$\{p_i\}_{i=1,\dots,n} = \frac{1}{n}$, а джерело Y – повідомлення $\{y_i\}_{i=1,\dots,2n} = i$ з імовірностями

$\{p_i\}_{i=1,\dots,2n} = \frac{1}{2n}$. Ентропії джерел та Y співвідносяться таким чином:

- 1) однакові
- 2) у джерела X менше
- 3) у джерела X більше
- 4) у джерела X може бути як менше, так і більше в залежності від значення n

17. Ентропія джерела повідомлень з m літер алфавіта, вважаючи, що загальна кількість літер в алфавіті дорівнює k і всі повідомлення рівноймовірні, становить:

- 1) $m \log k$
- 2) $k \log m$
- 3) $\log(km)$
- 4) $\log(k+m)$

18. Ентропія джерела дискретних повідомлень при виникненні взаємозалежності повідомлень:

- 1) не змінюється
- 2) збільшується
- 3) зменшується
- 4) може як збільшуватися, так і зменшуватися

19. Ентропія джерела повідомлень з імовірностями $\{p_i\}_{i=1,\dots,4} = \{0,5, 0,25, 0,25\}$ в бітах складає:

- 1) 1,25 2) 1,5 3) 1,75 4) 2

20. До неперервного не відноситься імовірнісний розподіл:

- 1) рівномірний 2) нормальний 3) гіпергеометричний 4) експонентний

21. Ентропія складного повідомлення розглядається як ентропія системи джерела первинних повідомлень X та перешкод, які впливають на повідомлення у каналі зв'язку, Y . Для випадків якщо X та Y взаємонезалежні, ентропія системи дорівнює:

- 1) $H(X)$ 2) 1 3) 0 4) $H(X) + H(Y)$

22. Ентропія складного повідомлення розглядається як ентропія системи джерела первинних повідомлень X та перешкод, які впливають на повідомлення у каналі зв'язку, Y . Для випадків, якщо повідомлення X однозначно викривляється перешкодою Y , ентропія системи дорівнює:

- 1) $H(X)$ 2) 1 3) 0 4) $H(X) + H(Y)$

23. Порядок дискретного ергодичного джерела повідомлень, у якого імовірність наступного повідомлення залежить тільки від попереднього дорівнює:

- 1) 0 2) 1 3) 2 4) 3

24. Розмірністю швидкості передачі сигналів є:

- 1) біт 2) біт·с 3) біт/с 4) бод

25. Розмірністю швидкості передачі інформації є:

- 1) біт 2) біт·с 3) біт/с 4) бод

26. Розмірністю пропускну спроможності каналу передачі інформації є:

- 1) біт 2) біт·с 3) біт/с 4) бод

27. При відсутності перешкод швидкість передачі інформації в системі джерело – канал – приймач при зростанні ентропії джерела:

- 1) не змінюється 2) збільшується 3) зменшується
4) може як збільшуватися, так і зменшуватися в залежності від швидкості

28. Найменша пропускну спроможність симетричного каналу для двійкових повідомлень досягається при імовірності помилкового приймання сигналу:

- 1) 0,3 2) 0,5 3) 0,8 4) 1

29. Найбільша пропускну спроможність симетричного каналу для двійкових повідомлень досягається при імовірності помилкового приймання сигналу:

- 1) 0,3 2) 0,5 3) 0,8 4) 1

30. Кількість співмножників у виразі для об'єму сигналу складає:

- 1) 2 2) 3 3) 4 4) 5

31. При збільшенні ширини смуги частот каналу зв'язку його пропускну спроможність:

- 1) не змінюється 2) збільшується прямо пропорційно
3) зменшується прямо пропорційно 4) збільшується логарифмічно

32. При збільшенні відношення потужностей сигналу і перешкоди пропускну спроможність каналу зв'язку:

- 1) не змінюється 2) збільшується прямо пропорційно
3) зменшується прямо пропорційно 4) збільшується логарифмічно

33. Величина надлишковості повідомлень може приймати множину значень:

- 1) $[0;1]$ 2) $[0;+\infty)$ 3) $[0;1)$ 4) $(0;1]$

34. При виникненні взаємозалежності повідомлень і збереженні розподілу безумовних імовірностей повідомлень величина статистичної надлишковості:

- 1) не змінюється 2) збільшується 3) зменшується

4) може як збільшуватися, так і зменшуватися в залежності від розподілу

35. При виникненні взаємозалежності повідомлень і збереженні розподілу безумовних імовірностей повідомлень величина імовірнісної надлишковості:

- 1) не змінюється 2) збільшується 3) зменшується

4) може як збільшуватися, так і зменшуватися в залежності від розподілу

36. Повідомлення джерела кодуються комбінаціями – a, b, c, ab, bc . Основа коду становить:

- 1) 2 2) 3 3) 4 4) 5

37. Загальна кількість кодових комбінацій n -розрядного двійкового коду складає:

- 1) n^2 2) $2n$ 3) 2^n 4) C_n^2

38. Джерело інформації генерує повідомлення $\{p_i\}_{i=1,\dots,4} = \{0,5, 0,25, 0,125, 0,125\}$, що кодуються двійковим кодом. Середня довжина кодової комбінації не може бути менше за:

- 1) 1,25 2) 1,5 3) 1,75 4) 2

39. Для джерела дискретних повідомлень з питомою середньою ентропією $H = 12$ біт, що кодується за допомогою кода з основою $m = 8$, середня довжина кодової комбінації не може бути менше ніж:

- 1) 2,5 2) 3 3) 3,5 4) 4

40. Код Хаффмана можна охарактеризувати як:

- 1) рівномірний 2) оптимальний 3) надлишковий 4) звичайний

41. До оптимальних не відноситься код:

- 1) Хаффмана 2) Шеннона – Фено 3) з постійною вагою

4) у якого середня довжина кодового слова дорівнює $\frac{H(X)}{\log m}$, де m – основа

коду

42. Джерело інформації генерує 12 повідомлень, що кодуються нормальним двійковим кодом. Мінімальна достатня кількість розрядів коду складає:

- 1) 2 2) 3 3) 4 4) 5

43. Кількість заборонених тетрад двійково-десятькового коду складає:

- 1) 2 2) 4 3) 6 4) 8

44. До перешкодостійких не відноситься код:

- 1) число-імпульсний 2) інверсний 3) кореляційний

4) з контрольними сумами

45. Властивістю перешкодостійкості володіє код:

- 1) Хеммінга 2) Хаффмана 3) НДК 4) Грея

46. Відстань між кодовими комбінаціями 01110 та 10011 складає:

- 1) 2 2) 3 3) 4 4) 5

47. Відстань між кодovими комбінаціями *abbb* та *aabc* складає:

- 1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

48. Кодова відстань НДК становить:

- 1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

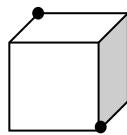
49. Найбільша кратність помилок, які може виявляти трирозрядний код з дозволеними комбінаціями 000, 110, 011, 101 складає:

- 1) не виявляє взагалі 2) 1 3) 2 4) 3

50. Найбільша кратність помилок, які може виправляти трирозрядний код з дозволеними комбінаціями 000, 110, 011, 101 складає:

- 1) не виправляє взагалі 2) 1 3) 2 4) 3

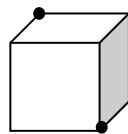
51. Припустимі кодові комбінації трирозрядного двійкового коду відмічені на геометричній моделі



Код виявляє всі помилки найбільшої кратності:

- 1) не виявляє взагалі 2) 1 3) 2 4) 3

52. Припустимі кодові комбінації трирозрядного двійкового коду відмічені на геометричній моделі



Код виправляє всі помилки найбільшої кратності:

- 1) не виправляє взагалі 2) 1 3) 2 4) 3

53. Максимальна кратність помилок, які може виявляти код з відстанню 5, складає:

- 1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

54. Максимальна кратність помилок, які може виправляти код з відстанню 5, складає:

- 1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

55. Мінімальна кодова відстань коду, який може виявляти двократні помилки, складає:

- 1) 2 2) 3 3) 4 4) 5

56. Мінімальна кодова відстань коду, який може виправляти двократні помилки, складає:

- 1) 2 2) 3 3) 4 4) 5

57. Серед зображених кодів найменшу надлишковість в середньому має код:

- 1) нормальний двійковий 2) Шеннона – Фено
3) який виявляє одну помилку 4) який виправляє одну помилку

58. Серед зображених кодів найбільшу надлишковість в середньому має код:

- 1) нормальний двійковий 2) Шеннона – Фено
3) який виявляє одну помилку 4) який виправляє одну помилку

59. Зі зростанням числа перевірних (контрольних) розрядів систематичного перешкодостійкого двійкового коду його надлишковість:

- 1) не змінюється
- 2) зменшується обернено пропорційно
- 3) збільшується прямо пропорційно
- 4) може як збільшуватися, так і зменшуватися в залежності від кількості розрядів

60. Код «пар» виявляє помилки кратності.

- 1) тільки однократні
- 2) тільки однократні і двократні
- 3) всі помилки парної кратності
- 4) всі помилки непарної кратності

61. Кількість інформаційних розрядів коду «пар» становить k . Загальна довжина його кодової комбінації складає:

- 1) $k+1$
- 2) $2k$
- 3) $2k+1$
- 4) $2(k+1)$

62. Кількість інформаційних розрядів КК становить k . Загальна довжина його кодової комбінації складає:

- 1) $k+1$
- 2) $2k$
- 3) $2k+1$
- 4) $2(k+1)$

63. Кількість інформаційних розрядів ІК становить k . Загальна довжина його кодової комбінації складає:

- 1) $k+1$
- 2) $2k$
- 3) $2k+1$
- 4) $2(k+1)$

64. Кількість дозволених кодових комбінацій n розрядного коду з постійною вагою w складає:

- 1) nw
- 2) n^w
- 3) w^n
- 4) C_n^w

65. Систематичний код з кодовою відстанню 3 використовується для кодування 15-ти повідомлень. Мінімальна достатня кількість контрольних розрядів становить:

- 1) 1
- 2) 2
- 3) 3
- 4) 4

66. Кількість контрольних розрядів ЛСК $G_{(n,k)}$ становить:

- 1) n
- 2) k
- 3) $n-k$
- 4) $n+k$

67. Розмір інформаційної підматриці (кількість рядків \times кількість стовпців) твірної матриці ЛСК $G_{(n,k)}$ становить:

- 1) $n \times n$
- 2) $k \times k$
- 3) $n \times k$
- 4) $k \times n$

68. Розмір контрольної підматриці (кількість рядків \times кількість стовпців) твірної матриці ЛСК $G_{(n,k)}$ становить:

- 1) $k \times k$
- 2) $n-k \times n-k$
- 3) $k \times n-k$
- 4) $n-k \times k$

69. Розмір перевірної матриці (кількість рядків \times кількість стовпців) ЛСК $G_{(n,k)}$ становить:

- 1) $n \times n$
- 2) $n-k \times n-k$
- 3) $n \times n-k$
- 4) $n-k \times n$

70. Надлишковість ЛСК $G_{(6,3)}$ становить:

- 1) 0,3
- 2) 0,4
- 3) 0,5
- 4) 0,6

71. Значення перевірних (контрольних) розрядів у ЛСК визначаються через значення інформаційних розрядів за допомогою операції:

- 1) заперечення
- 2) логічного додавання
- 3) логічного множення
- 4) додавання за модулем два

72. Про помилку (якщо вона має місце) лінійного систематичного коду $G_{(7,4)}$ 0101111, у якого контрольні розряди становлять $y_1=x_1\oplus x_2\oplus x_3$, $y_2=x_2\oplus x_3\oplus x_4$, $y_3=x_1\oplus x_3\oplus x_4$, свідчить розряд:

- 1) y_1 2) y_2 3) y_3 4) помилка відсутня

73. Помилка, якщо вона має місце в лінійному систематичному коді $G_{(6,3)}$ 101011, у якого контрольні елементи становлять $y_1=x_1\oplus x_2$, $y_2=x_2\oplus x_3$, $y_3=x_1\oplus x_3$, знаходиться у інформаційному розряді з номером:

- 1) 1 2) 2 3) 3 4) помилка відсутня

74. Двійковим еквівалентом багаточлену x^6+x^4+x+1 є комбінація:

- 1) 1010011 2) 0101100 3) 101001 4) 010110

75. Двійковим еквівалентом залишку від ділення багаточлену x^3+1 на x^2+x+1 є комбінація:

- 1) 00 2) 01 3) 10 4) 11

76. Надлишковість ЦК $G_{(7,4)}$ становить:

- 1) 0,32 2) 0,43 3) 0,5 4) 0,77

77. Кількість розрядів регістру зсуву ПК ЗК становить K . Регулярність кодового дерева виникає на такті роботи регістру:

- 1) 1 2) K 3) $K-1$ 4) $K+1$

78. Сигнали, які утворюються внаслідок КАМ, можуть мати різні значення:

- 1) амплітуди і частоти 2) фази і частоти
3) амплітуди і фази 4) амплітуди, фази і частоти

79. Сусіднім крапкам в радіальному напрямку на фазоамплітудній діаграмі ГК присвоюються коди:

- 1) Хеммінга 2) Хаффмана 3) НДК 4) Грея

80. ЦК із твірним багаточленом $P(x)=x^3+x+1$ виявляє всі помилки кратності:

- 1) тільки однократні 2) тільки двократні
3) тільки однократні і двократні 4) всі помилки кратності до 3 включно

81. ЦК із твірним багаточленом $P(x)=(x+1)(x^3+x+1)$ виявляє всі помилки кратності:

- 1) тільки однократні 2) тільки двократні
3) тільки однократні і двократні 4) всі помилки кратності до 3 включно

82. Незвідний двійковий багаточлен не обов'язково задовольняє умові:

- 1) багаточлен без залишку ділиться тільки на себе і на одиницю
2) всі коефіцієнти багаточлену є нулями або одиницями
3) вільним членом є одиниця
4) порядок багаточлену є непарним

83. Незвідним не є двійковий багаточлен:









- 1) $x+1$ 2) x^2+x+1 3) x^3+1 4) x^3+x+1

84. Перші чотири члени псевдовипадкової двійкової послідовності 1010, згенеровані на основі незвідного багаточлену $P(x)=x^4+x+1$ і значення початкової фази 0101. Помилка має місце у позиції:

- 1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

Кодові таблиці текстових символів

866 MS-DOS CYRILLIC

	20	30	40	50	60	70	80	90	A0	B0	C0	D0	E0	F0
0		0	@	Р	`	р	А	Р	а		Л	щ	р	Ё
	32	48	64	80	96	112	128	144	160	176	192	208	224	240
1	!	1	А	Q	а	q	Б	С	б		Л	т	с	ё
	33	49	65	81	97	113	129	145	161	177	193	209	225	241
2	"	2	В	R	b	r	В	Т	в		т	п	т	Є
	34	50	66	82	98	114	130	146	162	178	194	210	226	242
3	#	3	С	S	с	s	Г	У	г		т	ц	у	є
	35	51	67	83	99	115	131	147	163	179	195	211	227	243
4	\$	4	D	T	d	t	Д	Ф	д	†	—	ѣ	Ф	ї
	36	52	68	84	100	116	132	148	164	180	196	212	228	244
5	%	5	E	U	e	u	Е	Х	e	‡	†	ѣ	х	і
	37	53	69	85	101	117	133	149	165	181	197	213	229	245
6	&	6	F	V	f	v	Ж	Ц	ж	‡	‡	п	ц	ў
	38	54	70	86	102	118	134	150	166	182	198	214	230	246
7	'	7	G	W	g	w	З	Ч	з	п	‡	‡	ч	ў
	39	55	71	87	103	119	135	151	167	183	199	215	231	247
8	(8	Н	X	h	x	И	Ш	и	‡	ц	‡	ш	°
	40	56	72	88	104	120	136	152	168	184	200	216	232	248
9)	9	I	Y	i	y	Й	Щ	й	‡	ѣ	л	щ	•
	41	57	73	89	105	121	137	153	169	185	201	217	233	249
A	*	:	J	Z	j	z	К	Ъ	к	‡	ц	г	ъ	•
	42	58	74	90	106	122	138	154	170	186	202	218	234	250
B	+	;	K	[k	{	Л	Ы	л	‡	‡		ы	✓
	43	59	75	91	107	123	139	155	171	187	203	219	235	251
C	,	<	L	\	l		М	Ь	м	‡	‡		ь	№
	44	60	76	92	108	124	140	156	172	188	204	220	236	252
D	-	=	M]	m	}	Н	Э	н	‡	=		э	☒
	45	61	77	93	109	125	141	157	173	189	205	221	237	253
E	.	>	N	^	n	~	О	Ю	о	‡	‡		ю	■
	46	62	78	94	110	126	142	158	174	190	206	222	238	254
F	/	?	O	_	o	□	П	Я	п	‡	‡		я	NBSP
	47	63	79	95	111	127	143	159	175	191	207	223	239	255

1251 WINDOWS CYRILLIC

	20	30	40	50	60	70	80	90	A0	B0	C0	D0	E0	F0
0		0	@	Р	`	р	Ъ	ђ	NBSP	°	А	Р	а	р
	32	48	64	80	96	112	128	144	160	176	192	208	224	240
1	!	1	А	Q	а	q	Г	‘	Ў	±	Б	С	б	с
	33	49	65	81	97	113	129	145	161	177	193	209	225	241
2	"	2	В	R	в	r	,	’	ў	І	В	Т	в	т
	34	50	66	82	98	114	130	146	162	178	194	210	226	242
3	#	3	С	S	с	s	ѓ	“	Ј	і	Г	У	г	у
	35	51	67	83	99	115	131	147	163	179	195	211	227	243
4	\$	4	D	T	d	t	„	”	Ѧ	г	Д	Ф	д	ф
	36	52	68	84	100	116	132	148	164	180	196	212	228	244
5	%	5	E	U	e	u	...	•	Г	μ	Е	Х	е	х
	37	53	69	85	101	117	133	149	165	181	197	213	229	245
6	&	6	F	V	f	v	†	-	!	¶	Ж	Ц	ж	ц
	38	54	70	86	102	118	134	150	166	182	198	214	230	246
7	'	7	G	W	g	w	‡	-	§	•	З	Ч	з	ч
	39	55	71	87	103	119	135	151	167	183	199	215	231	247
8	(8	Н	X	н	х	NOTUSED	NOTUSED	Ё	ё	И	Ш	и	ш
	40	56	72	88	104	120	136	152	168	184	200	216	232	248
9)	9	І	Y	і	у	‰	™	©	№	Й	Щ	й	щ
	41	57	73	89	105	121	137	153	169	185	201	217	233	249
A	*	:	J	Z	ј	z	Љ	љ	Є	є	К	Ъ	к	ъ
	42	58	74	90	106	122	138	154	170	186	202	218	234	250
B	+	;	К	[к	{	<	>	«	»	Л	Ы	л	ы
	43	59	75	91	107	123	139	155	171	187	203	219	235	251
C	,	<	L	\	l		НЬ	њ	¬	і	М	Ь	м	ь
	44	60	76	92	108	124	140	156	172	188	204	220	236	252
D	-	=	M]	m	}	Ќ	ќ	SHY	S	Н	Э	н	э
	45	61	77	93	109	125	141	157	173	189	205	221	237	253
E	.	>	N	^	n	~	Ѧ	ћ	®	s	О	Ю	о	ю
	46	62	78	94	110	126	142	158	174	190	206	222	238	254
F	/	?	О	_	о		Ц	ц	Ї	ї	П	Я	п	я
	47	63	79	95	111	127	143	159	175	191	207	223	239	255

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

А

- Автокореляційна функція (АКФ) 100
 - дискретна 100
 - нормована на максимум 100
- Алгоритм
 - LZW 131
 - RLE 130
 - виправлення помилок ЦК 92
 - Хаффмана
 - графічний 63
 - з фіксованою таблицею 62
 - Шеннона – Фено 60
- Аудіокодек 123

Б

- Базис тригонометричний 140
- Багаточлен
 - двійковий 84
 - незвідний 85, 159
 - властивості 85
 - помилки 88
 - пакетної 90
 - примітивний 99, 142
 - властивості 99
 - твірний
 - ПВП 99
 - ЦК 85
- Біграма 45, 153

В

- Вага
 - коду 73
 - багаточлена 85
- Вектор помилки 80
- Відносна частота 109, 145
- Відстань
 - кодова 69
 - між кодовими комбінаціями 69
- Величина випадкова
 - дискретна 108, 144
 - неперервна 108, 144

Г

- Гамма розподіл імовірнісний 114
- Геометричне подання коду 68
- Гістограма 110, 150
- Глибина кольору 38, 121, 130
- Граф
 - каналу 26
 - двійкового симетричного 30
 - зі стиранням 32
 - кінцевого автомата 94
 - коду Хаффмана 62
 - лінійний 68
 - плоский 68
 - планарний 68

Д

- Декодер 116
- Дерево словника 131
- Діаграма ґратчаста 97
- Джерело повідомлень 5, 116
 - двійкове 10
 - двопозиційне 24
 - дискретне 10
 - ергодичне 22
 - неперервне 16

Е

- Емпірична оцінка ентропії
 - диференціальної 110
 - середньої питомої 110
- Ентропія
 - апріорна 6
 - двійкового джерела 10
 - диференціальна 17
 - двопозиційного джерела 24
 - ергодичного джерела 23
 - залишкова 6, 17
 - імовірнісних розподілів
 - дискретних 14, 113
 - неперервних 16, 114
 - об'єднання дослідів 26
 - повна 8
 - середня питома 8

- умовна 26
- часткова 8, 156
- Ефективність коду
- – щодо виявлення помилок 72
- – оптимального 128

I

- Імовірність
- перекручення
- – двійкового символу 30, 118
- – розряду коду 92
- правильного прийняття кодової комбінації 71
- події 6
- – складної 26, 152
- прийняття кодової комбінації з помилками 71
- помилок
- – які виявляються 72
- – які не виявляються 72
- появи
- – наслідку досліду 6
- – повідомлення 7, 10
- умовна 23, 26, 152
- Інформація 5

K

- Канал зв'язку 5
- – зі стиранням 32
- – двійковий симетричний 30
- – кабельний електричний 37
- – радіо 37, 38
- – оптичний 37
- Квадратурна амплітудна маніпуляція (КАМ) 97
- Квантування відліків 34
- Кінцевий автомат 93
- Класифікація кодів 51
- Код 51
- 4В/5В 103
- CRC-16 90
- Грея 65
- гратчастий 97
- двійково-десятковий (ДДК) 67
- згортковий (ЗК) 93

- із захистом за паритетом («пар») 71
- з контрольною сумою (Бергера) 75
- із сталою вагою (на одне з'єднання) 73
- інверсний (ІК) 74
- каналний 97
- кореляційний (КК) 74
- лінійний систематичний (ЛСК) 77
- неперешкодостійкий (звичайний) 51, 64
- нерівномірний 52
- нормальний двійковий (НДК) 64
- оптимальний 51
- перешкодостійкий 51
- рівномірний 52
- роздільний 57
- систематичний 53
- шумовий (ШК) 98
- Хаффмана (КХ) 62
- Хеммінга 81
- циклічний (ЦК) 84
- число-імпульсний (унітарний) 64
- Шеннона – Фено (КШФ) 60
- Кодове дерево 95
- Кодове обмеження 93
- Кодова таблиця 51
- – 1251 Windows Cyrillic 168
- – 4В/5В 103
- – 866 MS DOS Cyrillic 167
- Кодер 116
- Коефіцієнт
- завантаження каналу
- – – інформацією 117
- – – кодом 117
- стиснення
- – двійкового коду 127
- – повідомлення 46
- Кратність помилок
- – які виявляються 69
- – які виправляються 70

M

- Матриця
- канална 26

- перевірна 80
- твірна 77, 86
- Метод
 - виявлення і виправлення помилок
 - – – – мажоритарного декодування 83
 - – – – перевірних рівнянь 79
 - – – – синдромів 80, 91
 - матричний побудови
 - – – ЛСК 77
 - – – ЦК 86

Н

Надлишковість

- коду 53
- – систематичного двійкового 53
- повідомлення 45
- – імовірнісна 46
- – статистична 46

Нерівність Крафта – Макміллана 56

О

Об'єм

- вибірки 109, 144
- каналу 42
- сигналу 42

Обсяг алфавіту 51

Одиниця виміру

- – кількості інформації 7
- – пропускну́ї спроможності каналу зв'язку 29
- – швидкості передачі
- – – – інформації 29
- – сигналів 29

Основа коду 51

Оцінка Хеммінга 77

П

Пакет помилок 90

Підматриця

- інформаційна 78
- контрольна 78, 86

Подія випадкова 152

- – складна 152
- – – симетрична 153

- – статистично незалежна 152

Правило Лопітала 36

Пристрій кодування (ПК) 93

Пропускна спроможність каналу зв'язку

- – – – дискретного без перешкод 29
- – – – двійкового симетричного 30
- – – – – зі стиранням 32
- – – – при енергетичному підході 33
- – – – – і широкопсмуговою перешкодою 35

Полігон 14, 109, 146

- дискретної АКФ ПВП 101

Порядок ергодичного джерела повідомлень 22

Послідовність

- псевдовипадкова (ПВП) 98, 140
- – Хаффмана 98, 140
- – – АКФ 100, 140
- – – амплітудний спектр 140
- – – період 98, 140

Потік інформації 117

Потужність

- сигналу 34
- перешкоди 34
- – широкопсмугової 36

Початкова фаза ПВП 98, 141

Р

Регістр зсуву 93

Рівняння Ейлера – Лагранжа 21

Розподіл імовірнісний 14, 16, 108, 144

- – дискретний 14, 108, 144

- – – біномний 15, 113

- – – геометричний 113

- – – гіпергеометричний 113

- – – Пуассона 15, 113

- – – рівномірний 14, 113

- – диференціальний 108, 144

- – емпіричний 110, 145, 148

- – інверсний кумулятивний 108, 149

- – кумулятивний 108, 146

- – неперервний 16, 108, 146

- – – Вейбулла 115

- експонентний 20, 115
- логарифмічно нормальний 115
- нормальний 19, 114
- Пірсона 114
- рівномірний 18, 115
- теоретичний 108, 144, 146

Розряд кодової комбінації

- інформаційний 53
- контрольний 53

Ряд Фур'є 140

С

Симетричність алгоритму стиснення 130

Синдром 80, 82, 91

Синхронізація 102

Скремблерування даних 101

Спектр

- амплітудний 140
- фазовий 140

Стандарт LTE (Long-Term Evolution) 41

Стиснення даних

- без втрат 130
- із втратами 130

Ступінь

- кодування 93
- стиснення 130

Сукупність

- вибіркова 109
- генеральна 109

Т

Теорема

- Котельникова 34
- Шеннона 60

Технологія FDD (Frequency Division Duplex) 41

У

Умова

- узгодження сигналу й каналу
- загальна 43
- часткові 43
- Хеммінга 76

Ф

Формат файлу 120

- BMP 121
- заголовок 121
- BITMAPFILEHEADER 121
- BITMAPINFOHEADER 121
- палітра 121
- растрові дані 121
- TXT 120
- VOC 122
- заголовок 122
- блок
- звукових даних 123
- маркерний 124
- паузи 124
- продовження даних 124
- розширення 124
- текстових даних 124

Формула Стержесса 149

Функція

- Лагранжа 11, 21, 58
- Лапласа 150
- повної імовірності 153
- розподілу ймовірності 108, 146
- властивості 146

Ц

Цілі

- зашифрування 51
- кодування 51

Ч

Частота

- кадрової розгортки 38
- дискретизації 39, 124

Ш

Швидкість

- генерації
- кодових символів 117
- повідомлень 116
- передачі
- інформації 30, 117
- сигналів 29, 117

Ширина смуги частот

--- каналу 35
---- для передачі
мультимедійного контенту 37
---- обмеження 37
---- з широкопasmовою
перешкодою 35

--- радіоканалу 39
--- сигналу 35
Щ
Щільність імовірності 16, 108, 148
-- властивості 148

ЗМІСТ

Передмова	3
Передмова до другого видання	4
Вступ	5
1. Основи статистичної теорії інформації	6
1.1. Кількість інформації та ентропія	6
1.2. Ентропія дослідів, що мають нерівномірні взаємозалежні наслідки	7
1.3. Дослідження властивостей часткової ентропії	8
1.4. Дослідження ентропії двійкового джерела. Умова максимуму ентропії дискретного джерела, якщо $m > 2$	10
1.5. Ентропія типів дискретних розподілів	14
1.6. Ентропія типів неперервних розподілів	16
1.7. Ентропія ергодичної послідовності	22
1.8. Ентропія найпростіших ергодичних джерел	23
1.9. Ентропія двопозиційних ергодичних джерел	24
1.10. Ентропія об'єднання дослідів. Умовна ентропія	26
1.11. Пропускна спроможність дискретного каналу без перешкод	29
1.12. Пропускна спроможність каналу з перешкодами (статистичний підхід)	30
1.13. Пропускна спроможність каналу з перешкодами (енергетичний підхід)	33
1.14. Чинники обмеження пропускнуої спроможності каналів зв'язку різного фізичного походження	37
1.15. Вимоги до пропускнуої спроможності каналів передачі мультимедійного контенту	37
1.16. Особливості радіоканалів різних частотних діапазонів	38
1.17. Об'єми сигналів і каналів, їхнє узгодження	41
1.18. Надлишковість повідомлень	45
Контрольні питання і завдання	46
2. Основи теорії й практики кодування повідомлень у системах передачі технологічної інформації	51
2.1. Загальні положення. Класифікація кодів	51
2.2. Постановка завдання кодування в каналах без перешкод. Нерівність Крафта – Макміллана	56
2.3. Основна теорема кодування в каналах без перешкод та її наслідок	57
2.4. Алгоритм Шеннона – Фено	60
2.5. Алгоритм Хаффмана	62
2.6. Неперешкодостійкі (звичайні) коди	64
2.6.1. Число-імпульсний (унітарний) код	64
2.6.2. Нормальний двійковий код	64
2.6.3. Код Грея	65
2.6.4. Двійково-десятковий код	67

2.7. Загальні властивості кодів, які виявляють і виправляють помилки у даних	68
2.7.1. Геометричне подання комбінацій двійкових кодів	68
2.7.2. Виявлення помилок у кодових комбінаціях	69
2.7.3. Виявлення й виправлення помилок у кодових комбінаціях	70
2.8. Найпростіші коди, які виявляють помилки у даних	71
2.8.1. Код «пар» або код, що має захист за паритетом	71
2.8.2. Коди, що мають сталу вагу (коди на одне з'єднання)	73
2.8.3. Кореляційний, інверсний і коди контрольних сум даних	74
2.9. Лінійні систематичні коди (ЛСК)	76
2.9.1. Загальні відомості. Постановка завдання кодування для виявлення та виправлення помилок	76
2.9.2. Основні властивості ЛСК, матричний метод кодування повідомлень	77
2.9.3. Методи декодування ЛСК, які тільки виявляють або також виправляють помилки в даних	79
2.10. Циклічні коди (ЦК)	84
2.10.1. Загальні відомості. Двійкове й алгебраїчне подання комбінацій ЦК	84
2.10.2. Методика побудови систематичного ЦК	85
2.10.3. Матричний метод побудови систематичного ЦК	86
2.10.4. Властивості найпростіших ЦК з виявлення помилок і вибір необхідного твірного багаточлена	88
2.10.5. Виправлення помилок у ЦК	91
2.10.6. Згорткові коди	93
2.10.7. Канальне кодування	96
Контрольні питання і завдання	103
3. Лабораторний практикум	108
3.1. Дослідження ентропії джерел дискретних і безперервних повідомлень	108
3.2. Узгодження джерела дискретних повідомлень з двійковим симетричним каналом передачі повідомлень	116
3.3. Вивчення форм первинного кодування інформації в комп'ютерах	120
3.4. Вивчення алгоритмів оптимального кодування	127
3.5. Дослідження процесів стиснення растрових графічних даних за допомогою алгоритмів RLE і LZW	130
3.6. Вивчення методів перешкодостійкого кодування	136
3.7. Визначення характеристик псевдовипадкових послідовностей Хаффмана	140
Список літератури	143
Додаток 1. Закони розподілу випадкових величин	145
Д.1.1. Поняття про випадкову величину	145
Д.1.2. Диференціальна функція розподілу дискретної випадкової	

величини. Полігон розподілу	145
Д.1.3. Кумулятивна функція розподілу випадкової величини та її властивості	147
Д.1.4. Диференціальна функція розподілу неперервної випадкової величини та її властивості	149
Д.1.5. Емпірична функція розподілу неперервної випадкової величини. Гістограма розподілу	149
Додаток 2. Імовірності складних випадкових подій та умовні ймовірності	153
Додаток 3. Таблиця значень часткової ентропії	157
Додаток 4. Фрагмент таблиці незвідних багаточленів	160
Додаток 5. Однобальні тести для контролю залишкових знань з дисципліни	161
Додаток 6. Кодові таблиці текстових символів	168
Предметний покажчик	170

Кожевников Вячеслав Леонідович
Кожевников Антон Вячеславович

ТЕОРІЯ ІНФОРМАЦІЇ ТА КОДУВАННЯ

Навчальний посібник

Видано в авторській редакції

Електронний ресурс.
Підписано до видання 04.11.2024. Авт. арк. 13,2.

Підготовлено до видання
в Національному технічному університеті “Дніпровська політехніка”
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 1842 від 11.06.2004 р.
49005, м. Дніпро, просп. Д.Яворницького, 19