

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ДНІПРОВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»



ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ
Кафедра інформаційних технологій та комп'ютерної інженерії

А.В. Кожевников, К.Л. Сергєєва

КОМП'ЮТЕРНА МАТЕМАТИКА

Методичні рекомендації до виконання лабораторних робіт
для здобувачів ступеня бакалавра
освітньо-професійної програми «Інформаційні системи та технології»
зі спеціальності 126 Інформаційні системи та технології

Дніпро
НТУ «ДП»
2025

Кожевников А.В.

Комп'ютерна математика [Електронний ресурс] : методичні рекомендації до виконання лабораторних робіт для здобувачів ступеня бакалавра освітньо-професійної програми «Інформаційні системи та технології» зі спеціальності 126 Інформаційні системи та технології / А.В. Кожевников, К.Л. Сергєєва ; М-во освіти і науки України, Нац. техн. ун-т «Дніпровська політехніка». – Дніпро : НТУ «ДП», 2025. – 101 с.

Автори:

А.В. Кожевников, канд. техн. наук, доц.,

К.Л. Сергєєва, канд. техн. наук, доц.

Затверджено науково-методичною комісією зі спеціальності 126 Інформаційні системи та технології (протокол № 5 від 23.04.2025 р.) за поданням кафедри інформаційних технологій та комп'ютерної інженерії (протокол № 14 від 23.04.2025 р.).

Уміщено теоретичні відомості за темами лекційного курсу, варіанти лабораторних завдань з рекомендаціями до їх виконання, контрольні питання, список використаної та рекомендованої літератури.

Зміст методичних рекомендацій відповідає програмі обов'язкової навчальної дисципліни «Комп'ютерна математика» і адресовано бакалаврам, які проходять підготовку за спеціальністю 126 Інформаційні системи та технології, а також здобувачам інших спеціальностей, які вивчають цю дисципліну.

Відповідальний за випуск завідувач кафедри інформаційних технологій та комп'ютерної інженерії В. В. Гнатушенко, д-р техн. наук, проф.

1. ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Дисципліна “Комп’ютерна математика” – складова фахової підготовки бакалаврів спеціальності 126 Інформаційні системи та технології, що навчаються за освітньою програмою “Інформаційні системи та технології”. Мета дисципліни – формування у здобувачів вищої освіти компетентностей щодо розробки програмного забезпечення комп’ютерних систем, яке передбачає чисельні методи обробки даних.

Методичні рекомендації призначені для закріплення теоретичних знань, набутих здобувачами вищої освіти в лекційному курсі, а також формування практичних навичок виконання лабораторних робіт щодо чисельних методів математичної обробки даних.

У підсумку виконання лабораторних робіт здобувачі вищої освіти – майбутні фахівці повинні отримати результати навчання у відповідності з вимогами освітньої програми, які представлені в табл. 1.1.

Таблиця 1.1 Результати навчання, що отримуються у підсумку виконання лабораторних робіт з дисципліни “Комп’ютерна математика”.

ПР1.1-Ф11	На основі знання лінійної та векторної алгебри, диференціального та інтегрального числення, теорії функцій багатьох змінних, теорії рядів, диференціальних рівнянь для функції однієї та багатьох змінних, операційного числення, теорії ймовірностей та математичної статистики вміти розробляти та використовувати алгоритми функціонування та математичне забезпечення інформаційних систем, технологій та інфокомунікацій, сервісів та інфраструктури організації, які передбачають чисельні методи обробки даних.
ПР2.1-Ф11	На основі знання фундаментальних і природничих наук, системного аналізу та технологій моделювання, стандартних алгоритмів та дискретного аналізу, застосовувати їх при розв’язанні задач проектування і використання інформаційних систем та технологій, які передбачають чисельні методи обробки даних.

Мета лабораторних робіт – поглибити і систематизувати набуті здобувачами вищої освіти на лекціях теоретичні знання з дисципліни “Комп’ютерна математика” та сформувати у майбутніх фахівців з інформаційних систем та технологій професійних компетентностей (знань, умінь і навичок) використання методів та програмного забезпечення чисельної математичної обробки даних.

Лабораторні роботи передбачають застосування поширених математичних методів, які можуть бути використані для обробки даних. Кожна лабораторна робота має назву, ціль, постановку задачі, контрольні питання і завдання, рекомендації щодо виконання роботи та вимоги до оформлення звіту, а також варіанти індивідуальних завдань.

Одержання результатів робіт передбачено розрахунковими методами з використанням комп'ютерної техніки, яка працює на платформі Windows та програм середовищ математичних розрахунків Scilab та MathCAD.

Додатки містять програмні коди, які реалізують чисельні методи обробки даних, що розглядаються в лабораторних роботах. В них навмисне відсутні коментарі для того, щоб здобувачі вищої освіти мали змогу самостійно розібратися в функціональних призначеннях фрагментів програм та оздобити їх власними поясненнями.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ, МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДЛЯ ЇХ ВИКОНАННЯ ТА ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

2.1 Лабораторна робота № 1 Наближені обчислення

Об'єкт – методи наближених обчислень. Предмет – методи обчислення похибок складних алгебраїчних виразів. Мета – опанування методами обчислення похибок складних алгебраїчних виразів.

Стислі теоретичні відомості

Під похибкою будемо розуміти величину, що характеризує точність результату. Похибки, що виникають при розв'язуванні задачі, можна поділити на три групи:

- неусувна похибка;
- похибка методу;
- похибка обчислень.

Неусувна похибка може бути наслідком:

- неточності вхідних даних, що входять до математичного описання задачі;
- невідповідності математичної моделі реальній задачі (інколи цю похибку називають похибкою математичної моделі).

Похибка методу пояснюється тим, що для розв'язування математичної задачі доводиться використовувати наближені методи, оскільки отримання точного розв'язку вимагає необмеженої або неприйнятно великої кількості арифметичних операцій, а в деяких випадках і просто неможливо.

Похибка обчислень виникає при введенні-виведенні даних до комп'ютера та при виконанні математичних операцій.

Правило заокруглення чисел виглядає наступним чином: якщо старший розряд, що відкидається менше 5, то попередня цифра не змінюється, якщо старший розряд, що відкидається дорівнює, або більше 5, то попередня цифра в числі збільшується на 1.

Приклади заокруглення чисел:

$A=2,8497621$	$A=345,453275$
$a=2,849762$	$a=345,45328$
$a=2,84976$	$a=345,4533$
$a=2,8498$	$a=345,453$
$a=2,850$	$a=345,45$
$a=2,85$	$a=345,5$
$a=2,8$	$a=345$
$a=3$	$a=3,5 \cdot 10^2$
	$a=3 \cdot 10^2$

Абсолютну величину різниці між числом A і його наближеним значенням a називають абсолютною похибкою наближеного числа a

$$\Delta = |A - a|. \quad (2.1.1)$$

Відношення абсолютної похибки до модуля наближеного числа називають відносною похибкою наближеного числа

$$\delta = \frac{\Delta}{|a|} = \frac{|A - a|}{|a|}. \quad (2.1.2)$$

Точність результату зворотним чином пов'язана з відносною похибкою. Абсолютну та відносну похибки можна використати для наступного подання числа:

$$A = a \pm \Delta; \quad A = a(1 + \delta). \quad (2.1.3)$$

Значущими цифрами числа називаються всі цифри в його запису, починаючи з першої ненульової зліва. Наприклад:

$a = 4,570345$ – всі цифри в запису цього числа значущі;

$a = 0,007614$ – значущі цифри тільки 7,6,1,4;

$a = 0,03105600$ – значущі цифри 3,1,0,5,6,0,0 (два останні нулі в запису числа є значущими);

$a = 3750000$ – всі цифри значущі;

Значуща цифра називається вірною, якщо абсолютна похибка числа не перевищує половини одиниці розряду, що відповідає цій цифрі.

Наприклад, нехай $a = 14,537$ і відомо, що $\Delta = 0,04$. Оскільки $\Delta > 0,5 \cdot 10^{-2}$ і $\Delta < 0,5 \cdot 10^{-3}$. Отже у числі вірними будуть значущі цифри 1,4,5, а цифри 3 і 7 – сумнівні.

Нехай $a = 8,677142$ і $\Delta = 3 \cdot 10^{-4}$. Оскільки $\Delta = 0,3 \cdot 10^{-3} < 0,5 \cdot 10^{-3}$, вірними будуть значущі цифри 8,6,7,7.

Нехай $a = 0,046725$ і $\Delta = 0,008$. Оскільки $\Delta = 0,8 \cdot 10^{-2} > 0,5 \cdot 10^{-2}$, у числа всі значущі цифри сумнівні.

Правило підрахунку похибки суми (різниці) двох чисел

$$\Delta(a \pm b) = \Delta a + \Delta b. \quad (2.1.4)$$

Наслідком цього правила є те, що $\Delta(a \pm C) = \Delta a$, де C – стала величина.

Правило підрахунку похибки добутку (відношення) двох чисел

$$\delta(a \cdot / b) = \delta a + \delta b. \quad (2.1.5)$$

Наслідком цього правила є те, що $\delta(C \cdot a) = \delta a$, $\Delta(C \cdot a) = |C| \cdot \Delta a$.

Правило підрахунку похибки функції числа

$$\delta(f(a)) = \frac{|f'(a)|}{|f(a)|} \Delta a. \quad (2.1.6)$$

Прикладом застосування цього правила є те, що, $\delta(a^n) = |n| \cdot \delta a$, $\Delta(\sin(a)) = |\cos(a)| \cdot \Delta a$.

Постановка задачі

Дано

Пара чисельних рівностей, три алгебраїчні вирази, значення змінних, які до них входять та їх абсолютні похибки.

Потрібно

Порівняти точність рівностей, визначити абсолютні та відносні похибки чисельних значень алгебраїчних виразів.

Рекомендації щодо виконання роботи

1. Для визначення у завданні 1, яка з наведених рівностей точніша, слід обчислити арифметичний вираз, який міститься в одній з частин рівності з результатом, який містить на дві значущих цифри більше ніж число, яке міститься в протилежній частині рівності. Обчислити абсолютні похибки між цими результатом і числом та округлити його з надлишком. Обчислити відповідну відносну похибку. Аналогічні дії провести для другої рівності. Порівняти відносні похибки. Точніше буде та рівність, для якої відносна похибка менше.

2. Для визначення похибок чисельного значення алгебраїчного виразу у завданнях 2, 3, і вхідних даних, для яких задані значення та абсолютні похибки, слід обчислити складові виразу. У разі, якщо результатом обчислення складової є нескінченний дріб, округлювати його до кількості значущих цифр, яка є найбільшою для чисел, що входять до відповідної складової. Обчислити відносні та/або абсолютні похибки складових, користуючись правилами (2.1.4) – (2.1.6) та їх наслідками. Обчислити власне значення виразу, його відносну та абсолютні похибки, користуючись тими ж правилами. В представленні результату залишити вірні цифри. Значення абсолютної похибки округлити до одного розряду.

3. Для визначення похибок чисельного значення алгебраїчного виразу у завданні 4, і вхідних даних, у яких всі цифри в записах значень є вірними, слід обчислити складові виразу. У разі, якщо результатом обчислення складової є нескінченний дріб, округлювати його до кількості значущих цифр, яка є найбільшою для чисел, що входять до відповідної складової. Обчислити відносні та/або абсолютні похибки складових. При обчисленні відносних похибок складових, вважати, що всі цифри в записах значень складових є вірними і користуватися визначенням вірної цифри. Обчислити власне значення виразу, його відносну та абсолютні похибки, користуючись правилами (2.1.4) – (2.1.6) та їх наслідками. В представленні результату залишити вірні цифри. Значення абсолютної похибки округлити до одного розряду.

Приклад виконання розрахунків наведено в додатку 2.

Вимоги до звіту

Звіт роботі повинен містити:

1. Назву дисципліни та лабораторної роботи.
2. Прізвище, ім'я та по батькові здобувача вищої освіти, шифр групи, номер варіанту.
3. Об'єкт, предмет і мету лабораторної роботи.
4. Вхідні дані: пару чисельних рівностей, три алгебраїчні вирази, значення змінних, які до них входять та їх абсолютні похибки.
5. Покрокові описи виконання завдань 1 – 4 за п. 1 – 3 рекомендацій щодо виконання роботи, які містять відповідні математичні розрахунки та коментарі

до них.

6. Висновки.

Контрольні питання і завдання

1. Поясніть види похибок, які виникають при розв'язанні математичних задач на комп'ютері.
2. Сформулюйте правило заокруглення числа.
3. Дайте визначення абсолютної та відносної похибок числа.
4. Дайте визначення значущих та вірних цифр числа та наведіть відповідні приклади.
5. Сформулюйте правила підрахунку похибок для результатів обчислення арифметичних операцій та алгебраїчних функцій.
6. Наведіть приклади арифметичних операцій та алгебраїчних функцій в результаті виконання яких абсолютні та відносні помилки зменшуються.

Варіанти завдань

Містяться у додатку 1.

2.2 Лабораторна робота № 2

Чисельне диференціювання

Об'єкт – методи чисельного диференціювання. Предмет – методи чисельного диференціювання функцій, які задані аналітично та у вигляді дискретних рівновіддалених відліків. Мета – опанування методами чисельного диференціювання для обчислення значення похідних функцій, які задані аналітично та у вигляді дискретних рівновіддалених відліків.

Стислі теоретичні відомості

Завдання чисельного диференціювання виникають в тих випадках, коли функціональні залежності, для яких треба обчислити значення похідних, не мають аналітичних представлень. Так, результати експериментів, як правило мають вигляд послідовностей відповідних значень незалежної та залежної величин.

Постановка завдання чисельного диференціювання виглядає наступним чином: задані значення аргументу $\{x_i\}_{i=-m, \dots, n}$ з постійним кроком $\Delta x = h$ в околиці точки x_0 , $x_i = x_0 + i \cdot h$ та відповідні їм значення функції $\{y_i\}_{i=-m, \dots, n}$. Потрібно визначити значення похідних функції довільного порядку в точці x_0 .

Найпростішу формулу чисельного диференціювання можна отримати з визначення похідної функції

$$y'_0 = y'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \bigg|_{x=x_0} \approx \frac{y_1 - y_0}{h}. \quad (2.2.1)$$

Цю ж формулу можна отримати, ґрунтуючись на геометричному сенсі похідної, яка дорівнює тангенсу кута нахилу до осі абсцис дотичної до графіку

функції, що диференціюється, в точці, де визначається значення похідної.

Інші формули чисельного диференціювання отримуються з розкладення диференційованої функції в ряд Тейлора в околиці точки x_0 . Так, наприклад

$$\begin{aligned} y_1 &= y(x_0 + h) = y_0 + y'_0 h + \frac{y''_0}{2} h^2 + O(h^3); \\ y_{-1} &= y(x_0 - h) = y_0 - y'_0 h + \frac{y''_0}{2} h^2 + O(h^3); \\ y_1 - 2y_0 + y_{-1} &= y''_0 h^2 + O(h^3). \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Звідки отримуємо формули чисельного диференціювання для другої похідної

$$y''_0 \approx \frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{h^2}. \quad (2.2.3)$$

Завдання чисельного диференціювання відносяться до класу некоректних. Некоректність полягає у тому, що при дуже малих кроках диференціювання h зменшення кроку веде до збільшення похибки обчислення значення похідної. Причиною такого явища є дискретність представлення дійсних чисел у цифровому обчислювальному засобі і, як наслідок, неможливість обчислення різниці двох близьких за значеннями дійсних чисел з малою відносною похибкою результату. Так величина машинної похибки ε – це мінімальне число, яке сприймається обчислювальним засобом так, що $1 + \varepsilon > 1$. Якщо ε визначене як дійсне число з одиночною точністю (розмір 4 байт, що відповідає типам float та single), його значення становить 10^{-13} .

Ще одним корисним математичним апаратом, який безпосередньо пов'язаний з чисельним диференціюванням є кінцеві різниці, які дозволяють чисельно визначати максимальні значення похідних функцій довільного порядку на сегментах зміни незалежної змінної $[a; b]$. Вирази для кінцевої різниці 1-го та n -го порядків відповідно виглядають як

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i; \quad \Delta^{(n)} y_i = \Delta^{(n-1)} y_{i+1} - \Delta^{(n-1)} y_i. \quad (2.2.4)$$

При цьому

$$\max_{[a; b]} |y^{(n)}(x)| \approx \frac{\max_{[a; b]} |\Delta^{(n)} y_i|}{h^n}. \quad (2.2.5)$$

Постановка задачі

Дано

Поліноміальна та трансцендентна функції, для яких знаходяться похідні, дві формули чисельного диференціювання.

Потрібно

Визначити значення похідних функцій за допомогою формул чисельного диференціювання при різних значеннях кроку, перевірити отримані результати за допомогою шаблонів (функцій) середовища математичних розрахунків та аналітичного диференціювання.

Рекомендації щодо виконання роботи

1. Для виразів чисельного диференціювання з номерами № та 27-№, де № – порядковий номер здобувача вищої освіти за журналом, поліноміальної та трансцендентної функцій з номером № знайти значення функцій, які потрібні для обчислення їх похідних у точці $x=1$, та обчислити значення похідних за виразами. Розрахунки провести для рівновіддалених точок, що розташовані з кроком $h=0,01$ та $0,05$.

2. Обчислити значення похідних функцій за п. 1 у точці $x=1$ з використанням функцій (шаблонів) диференціювання середовища математичних розрахунків.

3. Обчислити аналітичні вирази для похідних функцій за п. 1 та їх значення у точці $x=1$.

4. Порівняти значення похідних функцій, які отримані різними методами.

Вимоги до звіту

Звіт роботі повинен містити:

1. Назву дисципліни та лабораторної роботи.
2. Прізвище, ім'я та по батькові здобувача вищої освіти, шифр групи, номер варіанту.
3. Об'єкт, предмет і мету лабораторної роботи.
4. Вхідні дані: диференційовані функції, вирази чисельного диференціювання, кроки диференціювання.
5. Код програми, що реалізує поставлені завдання (додаток 3).
6. Результати обчислення похідних функцій за допомогою: виразів чисельного диференціювання, функцій (шаблонів) диференціювання середовища математичних розрахунків, аналітичного диференціювання.
7. Висновки.

Контрольні питання і завдання

1. Поясніть, в яких випадках виникають завдання чисельного диференціювання.
2. Сформулюйте постановку завдання чисельного диференціювання.
3. Поясніть, в чому полягає некоректність завдання чисельного диференціювання і з якої причини вона виникає.
4. Дайте визначення машинної похибки.
5. Сформулюйте геометричний сенс першої похідної функції.
6. Отримайте найпростішу формулу чисельного диференціювання для першої похідної, ґрунтуючись на її геометричному сенсі.
7. Отримайте формулу чисельного диференціювання для першої похідної через значення функції y_{-1} та y_1 .
8. Запишіть вирази для кінцевої різниці 1-го та n -го порядків.

Варіанти завдань

Таблиця 2.2.1. Вирази чисельного диференціювання

№	Вираз чисельного диференціювання
1.	$y_0' = \frac{1}{12h}(y_{-2} - 8y_{-1} + 8y_1 - y_2)$
2.	$y_0' = \frac{1}{6h}(-11y_0 + 18y_1 - 9y_2 + 2y_3)$
3.	$y_1' = \frac{1}{6h}(-2y_0 - 3y_1 + 6y_2 - y_3)$
4.	$y_2' = \frac{1}{6h}(y_0 - 6y_1 + 3y_2 + 2y_3)$
5.	$y_3' = \frac{1}{6h}(-2y_0 + 9y_1 - 18y_2 + 11y_3)$
6.	$y_0' = \frac{1}{2h}(-3y_0 + 4y_1 - y_2)$
7.	$y_0' = \frac{1}{12h}(-3y_{-1} - 10y_0 + 18y_1 - 6y_2 + y_3)$
8.	$y_0' = \frac{1}{60h}(-147y_0 + 360y_1 - 450y_2 + 400y_3 - 225y_4 + 72y_5 - 10y_6)$
9.	$y_1' = \frac{1}{60h}(-10y_0 - 77y_1 + 150y_2 - 100y_3 + 50y_4 - 15y_5 + 2y_6)$
10.	$y_2' = \frac{1}{60h}(2y_0 - 24y_1 - 35y_2 + 80y_3 - 30y_4 + 8y_5 - y_6)$
11.	$y_3' = \frac{1}{60h}(-y_0 + 9y_1 - 45y_2 + 45y_4 - 9y_5 + y_6)$
12.	$y_4' = \frac{1}{60h}(y_0 - 8y_1 + 30y_2 - 80y_3 + 35y_4 + 24y_5 - 2y_6)$
13.	$y_5' = \frac{1}{60h}(-2y_0 + 15y_1 - 50y_2 + 100y_3 - 150y_4 + 77y_5 + 10y_6)$
14.	$y_6' = \frac{1}{60h}(10y_0 - 72y_1 + 225y_2 - 400y_3 + 450y_4 - 360y_5 + 147y_6)$
15.	$y_0'' = \frac{1}{h^2}(y_{-1} - 2y_0 + y_1)$
16.	$y_0'' = \frac{1}{12h^2}(-y_{-2} + 16y_{-1} - 30y_0 + 16y_1 - y_2)$
17.	$y_0'' = \frac{1}{h^2}(2y_0 - 5y_1 + 4y_2 - y_3)$
18.	$y_0'' = \frac{1}{12h^2}(11y_{-1} - 20y_0 + 6y_1 + 4y_2 - y_3)$

19.	$y_0'' = \frac{1}{24h^2}(70y_0 - 208y_1 + 228y_2 - 112y_3 + 22y_4)$
20.	$y_1'' = \frac{1}{24h^2}(22y_0 - 40y_1 + 12y_2 + 8y_3 - 2y_4)$
21.	$y_2'' = \frac{1}{24h^2}(-2y_0 + 32y_1 - 60y_2 + 32y_3 - 2y_4)$
22.	$y_3'' = \frac{1}{24h^2}(-2y_0 + 8y_1 + 12y_2 - 40y_3 + 22y_4)$
23.	$y_4'' = \frac{1}{24h^2}(22y_0 - 112y_1 + 228y_2 - 208y_3 + 70y_4)$
24.	$y_0'' = \frac{1}{180h^2}(2y_{-3} - 27y_{-2} + 270y_{-1} - 490y_0 + 270y_1 - 27y_2 + 2y_3)$
25.	$y_0''' = \frac{1}{2h^3}(-y_{-2} + 2y_{-1} - 2y_1 + y_2)$
26.	$y_0''' = \frac{1}{2h^3}(-3y_{-1} + 10y_0 - 12y_1 + 6y_2 - y_3)$

Таблиця 2.2.2. Поліноміальна та трансцендентна функції, для яких знаходяться похідні

№	Функції, для яких знаходяться похідні
1.	$6x^3 - 5x^2 - 3x + 8; \quad x - \operatorname{tg}(x) + 1$
2.	$10x^4 - 15x + 5; \quad \lg(x) - 3x + 5$
3.	$x^4 - 16x^3 + 8x^2 + 5x + 4; \quad \exp(x) - 2x$
4.	$x^5 - 8x^3 + x^2 + 3x - 8; \quad \ln(x) - 5x - 6$
5.	$5x^3 + 8x^2 - 20x + 3; \quad x - \sin(x) - 1$
6.	$7x^3 + 5x^2 - 13; \quad \exp(x) - x - 0,5$
7.	$5x^3 + 8x^2 + 20x + 3; \quad x^2 - \sin(5x)$
8.	$3x^4 + 7x^3 + 5x^2 + 5x + 4; \quad \lg(x) - \frac{1}{x^2}$
9.	$4x^4 + 15x - 13; \quad 2\lg(x) - 0,5x + 1$
10.	$3x^3 + 18x - 16; \quad x^2 - 20\sin(x)$
11.	$13x^3 - 6x^2 + 19x - 18; \quad x^2 - \cos(x)$
12.	$x^4 - 12x^3 - 18; \quad 0,5x^2 - \sin(10x)$
13.	$6x^3 - 7x^2 + 4; \quad \lg(x) - \frac{1}{2x} + 6$
14.	$3x^3 + 10x - 19; \quad 2x - \ln(x) + 1$
15.	$8x^4 - 11x^3 - 5x^2 + x + 10; \quad 3\sin(\sqrt{x}) - 0,25x - 4$

16.	$3x^3 - 12x^2 + 12x - 8; \ln(x) + (x+1)^3$
17.	$5x^5 - 10x - 2; x^2 - \cos(2x)$
18.	$8x^3 - 14x - 12; 5x - 8\ln(x) - 8$
19.	$(4x^2 - 5)(1-x)^2; x^2 - 8\ln(x^2 + 1) - 0,75$
20.	$x^4 - 9x^2 - 7x + 3; \exp(x) + \ln(x) - 10x$
21.	$2x^5 - 8x^4 + 3x^3 - x + 2; 2x\sin(x) - \cos(x)$
22.	$2x^3 - 8x^2 - 16x + 15; x - \lg(x) - 0,9$
23.	$12x^4 - 16x^3 + 2x - 3; x\exp(-(x+1)) + x - 10$
24.	$4x^5 - 12x^3 - 5x + 2; \exp(-x^2) + 4\sin(x) - x$
25.	$x^7 + 2x^5 + x^3 + 8x - 4; x^2 \exp(-x) - \sin(x) - x$
26.	$8x^8 - 15x^7 - 18x^3 - 19; 3x - \cos(x) - 1$

2.3 Лабораторна робота № 3

Чисельне інтегрування

Об'єкт – методи чисельного інтегрування. Предмет – квадратурні формули чисельного інтегрування функцій. Мета – опанування методами чисельного інтегрування за допомогою квадратурних формул.

Стислі теоретичні відомості

Постановка завдання чисельного інтегрування виглядає наступним чином: на сегменті $[a, b]$ для значень аргументу $\{x_i\}_{i=0..n}$, що слідує з постійним кроком $\Delta x = h$, $x_0 = a$, $x_n = b$, $x_i = x_0 + i \cdot h$, $h = \frac{b-a}{n}$ задані відповідні їм значення підінтегральної функції $\{y_i\}_{i=0..n}$. Останні можуть бути задані як чисельно, так і аналітично $y_i = f(x_i)$, де $f(x)$ – аналітичне подання підінтегральної функції.

Потрібно визначити значення інтегралу $I = \int_a^b f(x)dx$.

Квадратурні формули чисельного інтегрування ґрунтуються на геометричному сенсі визначеного інтегралу, який дорівнює площі криволінійної трапеції, яка обмежена прямими $y = 0$, $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$. При підрахунку значення інтеграла криволінійна трапеція замінюється більш простою фігурою: прямокутником, звичайною трапецією, трапецією з параболічною бічною стороною тощо. Площа цієї фігури і є шуканим інтегралом.

Складені квадратурні формули, які і розглядаються в цій лабораторній роботі також ґрунтуються на властивості адитивності визначеного інтегралу,

яка полягає у тому, що значення інтегралу певному на сегменті дорівнює сумі значень інтегралів на всіх підсегментах цього сегменту.

Далі приводяться найпростіші складені квадратурні формули, в котрих криволінійна трапеція, площа якої дорівнює значенню інтеграла, замінюється фігурою, що дає назву формули. Висота фігур завжди дорівнює кроку інтегрування h .

Формули прямокутників: лівих, правих і середніх. Відрізняються значенням аргументу для якого визначається значення функції, яке є основою прямокутника. Відповідно це ліва, права межа підсегменту інтегрування, або його середина.

Формула лівих прямокутників

$$I = h \sum_{i=0}^{n-1} y_i = h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = h \sum_{i=0}^{n-1} f[a + i \cdot h]. \quad (2.3.1)$$

Формула лівих прямокутників

$$I = h \sum_{i=1}^n y_i = h \sum_{i=1}^n f(x_i) = h \sum_{i=1}^n f[a + i \cdot h]. \quad (2.3.2)$$

Формула лівих прямокутників

$$I = h \sum_{i=0}^{n-1} f[0,5(x_i + x_{i+1})] = h \sum_{i=0}^{n-1} f[a + (i + 0,5)h]. \quad (2.3.3)$$

Формула трапецій

$$I = h \left[\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right] = h \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right] = h \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(a + i \cdot h) \right]. \quad (2.3.4)$$

Формула парабол (Сімпсона)

$$I = \frac{h}{3} \left\{ y_0 - y_n + \sum_{i=1,3}^{n-1} [4y_i + 2y_{i+1}] \right\} = \frac{h}{3} \left\{ f(a) - f(b) + \sum_{i=1,3}^{n-1} [4f(x_i) + 2f(x_{i+1})] \right\} = \frac{h}{3} \left\{ f(a) - f(b) + \sum_{i=1,3}^{n-1} [4f(a + i \cdot h) + 2f(a + (i+1) \cdot h)] \right\}. \quad (2.3.5)$$

В роботі також розглядається обчислення визначеного інтегралу методом Монте Карло. Він відноситься до класу стохастичних чисельних методів і використовує псевдовипадкові числа, які рівномірно розподілені на сегменті

інтегрування. Термін “псевдовипадкові” означає, що функція, яка використовується для отримання таких чисел генерує періодичні послідовності таких чисел, на відміну від послідовностей істинно випадкових чисел, які є неперіодичними. Періодичність послідовностей псевдовипадкових чисел пов’язана з рекурентним характером алгоритмів їх генерації і дискретністю представлення дійсних чисел у цифровому обчислювальному засобі. Остання означає їх кінцеву кількість для будь-якого типу представлення. Наприклад, якщо числа представляються 4-ма байтами, максимальне число таких чисел на всьому діапазоні їх можливої зміни складає 2^{32} . Тоді, оскільки наступне число в послідовності генерується на основі попереднього, неминуче колись буде згенероване число, яке вже зустрічалося у послідовності, і вона почне повторюватися. Метод Монте Карло може бути застосований тільки у випадках, коли підінтегральна функція задається аналітично. Формула для обчислення визначеного інтегралу цим методом має вигляд

$$I = \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^N f(\xi_i), \quad (2.2.6)$$

де $\{\xi_i\}_{i=1..N}$ – псевдовипадкові числа, які рівномірно розподілені на сегменті інтегрування, N – їх кількість.

Постановка задачі

Дано

Два визначених інтеграли.

Потрібно

Визначити значення інтегралів за допомогою квадратурних формул при різних значеннях кроку, перевірити отримані результати за допомогою методу Монте-Карло, шаблонів (функцій) середовища математичних розрахунків та аналітично за формулою Ньютона – Лейбніца.

Рекомендації щодо виконання роботи

1. Обчислити визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ з номером №, де № – порядковий номер здобувача вищої освіти за журналом. Для парних варіантів використати формули лівих прямокутників та трапецій, а для непарних – формули правих та середніх прямокутників. Розрахунки провести для $n=10$ та 30 кроків інтегрування за допомогою відповідно шаблону суми та програмного блоку середовища математичних розрахунків.

2. Обчислити визначений інтеграл з номером 27-№ за формулою Сімпсона та методом Монте Карло. Розрахунки провести для $n=10$ кроків інтегрування в першому випадку та $N=10^5$ випробувань – у другому.

3. Обчислити визначені інтеграли за п. 1, 2 з використанням шаблону інтегрування середовища математичних розрахунків.

4. Обчислити аналітичні вирази для первісних функцій відносно підінтегральних за п. 1, 2, за формулою Ньютона – Лейбніца визначити умовно точні значення відповідних визначених інтегралів за п. 1, 2.

5. Порівняти значення визначених інтегралів, які отримані різними методами.

Вимоги до звіту

Звіт роботі повинен містити:

1. Назву дисципліни та лабораторної роботи.
2. Прізвище, ім'я та по батькові здобувача вищої освіти, шифр групи, номер варіанту.
3. Об'єкт, предмет і мету лабораторної роботи.
4. Вхідні дані – визначені інтеграли, які потрібно обчислити.
5. Код програми, що реалізує поставлені завдання (додаток 4).
6. Результати обчислення інтегралів за допомогою: квадратурних формул, методу Монте Карло, функцій (шаблонів) інтегрування середовища математичних розрахунків, формули Ньютона – Лейбніца.
7. Висновки.

Контрольні питання і завдання

1. Поясніть в яких випадках виникають завдання чисельного інтегрування.
2. Сформулюйте постановку завдання чисельного інтегрування.
3. Сформулюйте геометричний сенс визначеного інтегралу.
4. Поясніть, у чому полягає властивість адитивності визначеного інтегралу.
5. Поясніть підхід, на якому ґрунтуються квадратурні формули для визначених інтегралів.
6. Назвіть найпростіші квадратурні формули для визначених інтегралів і приведіть їх.
7. Поясніть, чим відрізняються формули лівих, правих і середніх прямокутників.
8. Приведіть формулу для методу Монте Карло для підрахунку визначених інтегралів.
9. Поясніть причину виникнення періодичності послідовностей псевдовипадкових чисел.
10. Приведіть формулу Ньютона – Лейбніца для значення визначеного інтегралу.

Варіанти завдань

Таблиця 2.3.1. Визначені інтеграли

№	Інтеграл	№	
1	$\int_0^2 \frac{2x-1}{x+1} dx$	14	$\int_{-1}^1 \frac{3x+1}{\exp(x)} dx$
2	$\int_1^2 \frac{3x^2-4}{\sqrt{6x-3}} dx$	15	$\int_0^1 \frac{\sqrt{x+5}}{x+1} dx$
3	$\int_0^2 \frac{\sin(2x)}{\sqrt{1+\cos(x)}} dx$	16	$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} dx$

4	$\int_0^2 \frac{\sin(5x)}{\sqrt{1-\cos^2(x)}} dx$	17	$\int_{1,5}^2 \frac{x^4}{\sqrt{x^2-2}} dx$
5	$\int_0^2 \frac{x}{x^4+2x^2+5} dx$	18	$\int_5^6 \frac{1}{x\sqrt{2x-9}} dx$
6	$\int_0^1 \frac{\exp(x)}{\sqrt{\exp(x)+1}} dx$	19	$\int_1^2 \frac{\sin(\sqrt{x})+\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}\cos(2\sqrt{x})} dx$
7	$\int_2^3 \frac{x}{x^2-1} dx$	20	$\int_2^3 \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} dx$
8	$\int_1^2 \frac{x^2}{\sqrt{2x-1}} dx$	21	$\int_1^2 \frac{x^2}{\sqrt{2x-1}} dx$
9	$\int_1^2 \frac{\exp(\sqrt{2x-1})}{\sqrt{2x-1}} dx$	22	$\int_0^1 x(x^2+1)^{\frac{3}{2}} dx$
10	$\int_1^2 \frac{\sqrt{3x+5}}{x} dx$	23	$\int_0^1 \frac{x+1}{2x^2+1} dx$
11	$\int_0^1 \exp(x)\sin(x) dx$	24	$\int_0^1 x^2 \sin(x) dx$
12	$\int_0^1 x^2 \arctan(x) dx$	25	$\int_1^2 \sin(\ln(x)) dx$
13	$\int_0^\pi \sin^2(x)\cos^4(x) dx$	26	$\int_0^1 \operatorname{tg}^2(x) dx$

2.4 Лабораторна робота № 4

Розв'язання алгебраїчних рівнянь з дійсними коренями

Об'єкт – методи розв'язання алгебраїчних рівнянь з дійсними коренями.

Предмет – чисельні методи дихотомії, хорд, дотичних, ітерації розв'язання алгебраїчних рівнянь з дійсними коренями. Мета – опанування чисельними методами розв'язання алгебраїчних рівнянь з дійсними коренями.

Стислі теоретичні відомості

Будь-яке алгебраїчне рівняння відносно однієї незалежної змінної x може бути зведено до вигляду $f(x) = 0$, де у лівій частині міститься довільна функція незалежної змінної. Рішенням, або коренем алгебраїчного рівняння зветься число x^* , які при підстановці в рівняння обертає його на тотожність. Кількість коренів рівняння залежить від функції правої частини рівняння і можливих меж змін незалежної змінної. Корені рівняння можуть бути цілими, дійсними і комплексними числами. Деякі види рівнянь, наприклад квадратні, або деякі

тригонометричні, однозначно мають аналітичне рішення, а деякі можна розв'язати тільки чисельно.

Чисельні методи розв'язання алгебраїчних рівнянь є ітераційними, в них наближення кореня рекурентно покращується в процесі послідовних наближень або ітерацій. Критерієм припинення ітерацій, як правило, є зменшення верхньої граничної абсолютної похибки різниці між істинним значенням кореня і його наближенням до певної наперед визначеної припустимої похибки локалізації кореня. В іншому варіанті критерія використовується абсолютна похибка різниці між значенням наближень кореня на послідовних кроках ітерацій. Можливе також просте обмеження кількості ітерацій. Далі розглядаються рекурентні співвідношення для значень наближення кореня на послідовних кроках ітерацій та похибки деяких методів розв'язання алгебраїчних рівнянь з дійсними коренями.

Далі використовується критерій існування кореня алгебраїчного рівняння $f(x) = 0$ на сегменті локалізації $[a; b]$ за умови, що при існуванні він є єдиним, котрий виглядає як

$$f(a) \cdot f(b) < 0. \quad (2.4.1)$$

Метод дихотомії. Ґрунтується на послідовному діленні навпіл сегментів локалізації кореня. За нульове наближення кореня приймається середина вхідного сегмента локалізації кореня $[a; b]$, тобто $x_0 < 0,5(a + b)$. При першій ітерації перевіряється виконання умови $f(a) \cdot f(x_0) < 0$. При її виконанні у якості подальшого сегменту локалізації кореня приймається $[a; x_0]$, інакше $[x_0; b]$. Аналогічним чином здійснюється визначення сегментів локалізації кореня на наступних кроках ітерацій. Похибка локалізації кореня x^* на n -му кроці ітерацій оцінюється як

$$|x^* - x_n| < \frac{b - a}{2^{n+1}} \leq \Delta, \quad (2.4.2)$$

де Δ – наперед визначена припустима похибка локалізації кореня. Графічна схема алгоритму за метод дихотомії наведена у додатку 5.

Метод хорд. В цьому методі на першому кроці ітерацій точки на графіку функції лівої частини рівняння на кінцях сегменту локалізації кореня поєднуються хордою. Координата її перетину осі абсцис приймається за перше наближення кореня. На наступних кроках ітерацій хорди до графіку функції проводяться в точках, які відповідають попереднім наближенням. З рис. 2.4.1, який графічно ілюструє метод хорд випливає, що

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{-f(a)}{x_1 - a}, \quad (2.4.3)$$

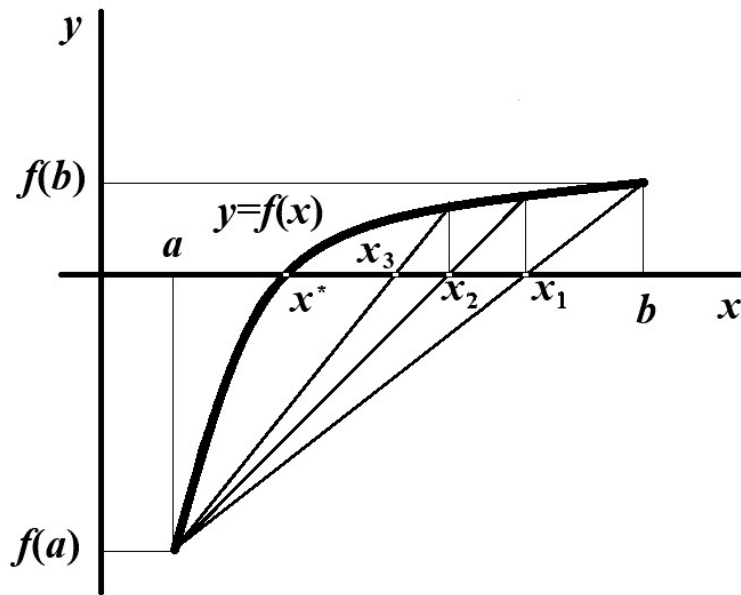


Рис. 2.4.1 Графічна інтерпретація методу хорд

Тоді рекурентні співвідношення для значень наближення кореня на послідовних кроках ітерацій мають вигляд

$$x_1 = a + \frac{f(a)}{f(a) - f(b)}(b - a), \dots, x_n = a_n + \frac{f(a_n)}{f(a_n) - f(b_n)}(b_n - a_n), \quad (2.4.4)$$

де a_n, b_n – кінці сегменту локалізації кореня на поточному кроці ітерацій. Існують різні варіанти програмної реалізації методу хорд. Кінці сегменту локалізації кореня на поточному кроці ітерацій можна визначати після кожного кроку за допомогою співвідношення (2.4.1) так, як це робилося у методі дихотомії. Але, як впливає з рис. 2.4.1, один з кінців залишається нерухомим. Цей кінець задовольняє умові $c = a \vee b, f(c) \cdot f''(c) > 0$. Тобто, в альтернативному варіанті можна перед здійсненням ітерацій з'ясувати, який з кінців є нерухомим, і в процесі ітерацій використовувати співвідношення

$$\begin{cases} x_n = a + \frac{f(a)}{f(a) - f(x_{n-1})}(x_{n-1} - a) & \text{при } f(a) \cdot f''(a) > 0 \\ x_n = x_{n-1} + \frac{f(x_{n-1})}{f(x_{n-1}) - f(b)}(b - x_{n-1}) & \text{при } f(b) \cdot f''(b) > 0 \end{cases}. \quad (2.4.5)$$

Похибка локалізації кореня x^* на n -му кроці ітерацій оцінюється як

$$|x^* - x_n| < \frac{f(x_n) \cdot f(c)}{2} \max_{[a;b]} \left| \frac{f''(x)}{f'(x)^3} \right| \leq \Delta. \quad (2.4.6)$$

Метод дотичних. В цьому методі на першому кроці ітерацій до графіку функції лівої частини рівняння на кінці сегменту локалізації кореня $c = a \vee b$, $f(c) \cdot f''(c) > 0$ проводиться дотична. Координата її перетину осі абсцис приймається за перше наближення кореня. На наступних кроках ітерацій дотичні до графіку функції проводяться в точках, які відповідають попереднім наближенням. З рис. 2.4.2, який графічно ілюструє метод дотичних випливає, що $-f(a) = f'(a) \cdot (x_1 - a)$.

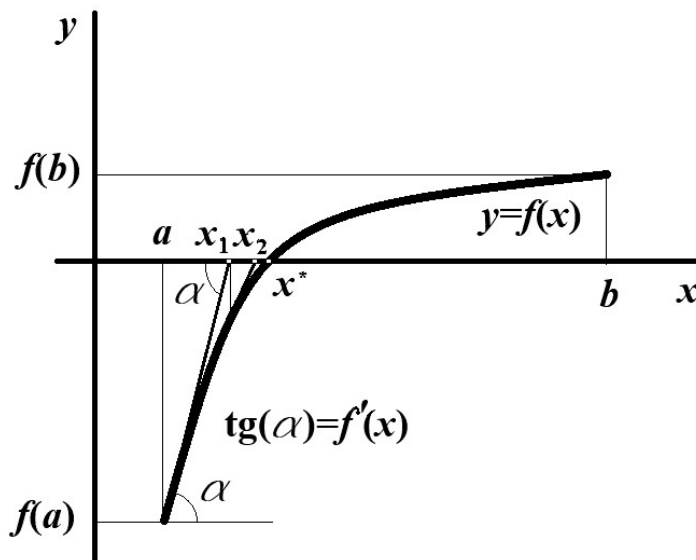


Рис. 2.4.2 Графічна інтерпретація методу дотичних

Тоді рекурентні співвідношення для значень наближення кореня на послідовних кроках ітерацій мають вигляд

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}, \quad x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}, \dots, x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}. \quad (2.4.7)$$

Похибка локалізації кореня x^* на n -му кроці ітерацій оцінюється як

$$|x^* - x_n| < \frac{f(x_n)^2}{2} \max_{[a;b]} \left| \frac{f''(x)}{f'(x)^3} \right| \leq \Delta. \quad (2.4.8)$$

Підводячи підсумок розгляду трьох методів, слід зазначити, що найповільнішим є метод дихотомії, найбільшу швидкість збіжності має метод дотичних. Метод дихотомії є найпростішим при програмній реалізації, реалізації методів хорд та дотичних є порівняно складнішими. Методи дихотомії та хорд відносяться до безградієнтних, оскільки для визначення чергового наближення кореня вимагають знання тільки власно значень функції лівої частини рівняння, а метод дотичних, до градієнтних, оскільки він вимагає також знання значень похідної функції лівої частини рівняння, які можуть бути обчислені як аналітично, так і чисельно.

Метод ітерацій. На відміну від попередніх методів використовується для розв'язання рівнянь виду $\varphi(x) = x$. Необхідною умовою збіжності метода є обмеження значення похідної функції лівої частини рівняння на сегменті пошуку кореня $|\varphi'(x)| \leq r < 1$. Рекурентні співвідношення для значень наближення кореня на послідовних кроках ітерацій мають вигляд

$$x_0 = \varphi(a), \quad x_1 = \varphi(x_0), \dots, x_n = \varphi(x_{n-1}). \quad (2.4.9)$$

Похибка локалізації кореня x^* на n -му кроці ітерацій оцінюється як

$$|x^* - x_n| = \frac{r}{1-r} |x_n - x_{n-1}| < \Delta. \quad (2.4.10)$$

Тоді умова припинення ітерацій може бути записана у вигляді

$$|x_n - x_{n-1}| < \frac{1-r}{r} \Delta. \quad (2.4.11)$$

Графічна схема алгоритму за методом ітерацій наведена у додатку 5.

Постановка задачі

Дано

Функції лівої частини алгебраїчного рівняння $f(x) = 0$; $\varphi(x) = x$, які мають дійсні корені, та сегменти пошуку кореня.

Потрібно

За допомогою чисельних ітераційних методів знати дійсні корені рівняння в області пошуку, перевірити отриманий результати за допомогою функцій середовища математичних розрахунків. Дослідити залежність похибок локалізації кореня від кількості ітерацій.

Рекомендації щодо виконання роботи

1. Для поліноміальної функції $f(x)$ з номером $\aleph\mathbb{C}$, де $\aleph\mathbb{C}$ – порядковий номер здобувача вищої освіти за журналом, та заданого сегмента локалізації кореня $[a; b]$, розрахувати наближене значення кореня рівняння $f(x) = 0$ при величинах абсолютної похибки локалізації кореня $\Delta = \{10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}\}$. Під абсолютною похибкою локалізації кореня розуміти модуль різниці наближень кореня на послідовних кроках ітерацій. Для розрахунків використовувати методи з номерами $(\aleph\mathbb{C} + \aleph\mathbb{G}) \bmod 3 + 1$ та $(\aleph\mathbb{C} + \aleph\mathbb{G} + 1) \bmod 3 + 1$, де $\aleph\mathbb{G}$ – порядковий номер групи, а методи мають номери: 1 – дихотомії, 2 – хорд, 3 – дотичних. Побудувати графіки залежності кількості ітерацій k , які потрібні для досягнення потрібної похибки від величини похибки Δ .

2. З використанням середовища математичних розрахунків MathCAD:

побудувати графік функції $f(x)$ на заданому сегменті локалізації кореня, знайти корінь рівняння $f(x) = 0$ за допомогою вбудованої функції середовища математичних розрахунків. Порівняти результати, що отримані за п. 1 та 2;

3. Для функції $\varphi(x)$ з номером №С та заданого сегмента локалізації кореня $[a;b]$, визначити максимальне значення похідної функції шляхом побудування її графіка. Розрахувати наближене значення кореня рівняння $f(x) = x$ методом ітерацій при величинах абсолютної похибки $\Delta = \{10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}\}$. Побудувати графік залежності кількості ітерацій k , які потрібні для досягнення потрібної похибки Δ від її величини.

4. Знайти корінь рівняння $\varphi(x) - x = 0$ на заданому сегменті за допомогою вбудованої функції середовища математичних розрахунків. Побудувати графік функції $\varphi(x) - x = 0$ та графічно визначити значення кореня. Порівняти результати, що отримані за п. 3 та 4.

Вимоги до звіту

Звіт роботі повинен містити:

1. Назву дисципліни та лабораторної роботи.
2. Прізвище, ім'я та по батькові здобувача вищої освіти, шифр групи, номер варіанту.
3. Об'єкт, предмет і мету лабораторної роботи.
4. Вхідні дані: алгебраїчне рівняння, що розв'язується, та параметри області пошуку кореня.
5. Код програми, що реалізує поставлені завдання (додаток 6).
6. Результати обчислення дійсних коренів рівнянь $f(x) = 0$; $\varphi(x) = x$ різними методами згідно п. 1 – 4 рекомендацій щодо виконання роботи.
7. Графіки залежностей: кількості ітерацій методу згідно варіанту і п. 1 рекомендацій щодо виконання роботи та методу ітерацій, які достатні для досягнення абсолютної похибки рішення: $\Delta = \{10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}\}$.

8. Висновки.

Контрольні питання і завдання

1. Дайте визначення кореня алгебраїчного рівняння. Які числа можуть бути коренями?
2. Приведіть приклади алгебраїчних рівнянь, які можливо розв'язати аналітично.
3. Приведіть критерій існування кореня алгебраїчного рівняння $f(x) = 0$ на сегменті локалізації $[a;b]$ за умови, що при існуванні він є єдиним.
4. Запишіть рекурентні співвідношення для чергового наближення кореня методів: дихотомії, хорд, дотичних, ітерацій.
5. Запишіть співвідношення для верхніх меж абсолютних похибок локалізації кореня методів: дихотомії, хорд, дотичних.
6. Дайте графічну інтерпретацію методів хорд та дотичних.
7. Приведіть переваги та недоліки методів: дихотомії, хорд, дотичних.

Варіанти завдань

Таблиця 2.4.1. Функція лівої частини алгебраїчного рівняння та сегмент пошуку кореня

№	Функція для рівняння $f(x)=0$	Сегмент $[a;b]$	Функція для рівняння $\varphi(x) = x$	Сегмент $[a;b]$
1	$6x^3 - 5x^2 - 3x + 8$	$[-2;0]$	$0,2(x^2 + \sin(x) + 1)$	$[-1;1]$
2	$10x^4 - 15x - 5$	$[-1;0,5]$	$0,3(x^2 + \cos(x) + 1)$	$[-1;1]$
3	$x^4 - 16x^3 + 8x^2 + 5x + 4$	$[0;2]$	$\exp(-x)$	$[0;1]$
4	$x^4 - 8x^3 + x^2 + 3x - 8$	$[-1,5;0]$	$\cos^2(x)$	$[0;1]$
5	$5x^3 + 8x^2 - 20x + 3$	$[0;1]$	$(1+x)\exp(-x)$	$[0;1]$
6	$7x^3 + 5x^2 - 13$	$[0,5;1,5]$	$(1+x^2)\exp(-x)$	$[0;1]$
7	$5x^3 + 8x^2 + 20x + 3$	$[-0,5;0,5]$	$(0,5+x)\cos(x)$	$[0;1]$
8	$3x^4 + 7x^3 + 5x^2 + 5x + 4$	$[0;1,5]$	$\ln(x) + \sqrt{x}$	$[2;5]$
9	$4x^4 + 15x - 13$	$[0;1]$	$1 + \sqrt{x}$	$[0,5;3]$
10	$3x^3 + 18x - 16$	$[0;1,5]$	$0,1(5x^3 - 2)$	$[-0,5;0]$
11	$13x^3 - 6x^2 + 19x - 18$	$[0;1,5]$	$1 + \sqrt[3]{x}$	$[0,5;3]$
12	$x^4 - 12x^3 - 18$	$[-1,5;0]$	$1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$	$[1,5;2]$
13	$6x^3 - 7x^2 + 4$	$[-1,5;0]$	$\sqrt{\frac{\operatorname{tg}(x)}{2}}$	$[0,2;1]$
14	$3x^3 + 10x - 19$	$[0;2]$	$\sqrt{\frac{1 + \cos(x)^2}{2+x}}$	$[0;1]$
15	$8x^4 - 11x^3 - 5x^2 + x - 10$	$[-2;0]$	$\sqrt{\frac{1 + \sin(x)^2}{2+x}}$	$[0;1]$
16	$3x^3 - 12x^2 + 12x - 8$	$[2,5;3,5]$	$\sqrt{\frac{1+x}{2+\exp(x)}}$	$[0;1]$
17	$5x^3 - 10x - 2$	$[-1;0]$	$\sin(x) + \cos^2(x)$	$[0;1,2]$
18	$8x^3 - 14x - 12$	$[1;2]$	$x \cdot \exp(-x) + 1$	$[0;1,5]$
19	$4x^4 - 8x^3 - x^2 + 10x - 5$	$[-1,5;0]$	$\frac{1}{16}(2x^3 - 8x^2 + 15)$	$[0;1]$
20	$x^4 - 9x^2 - 7x + 3$	$[0;1]$	$\frac{1}{8}(8 - x^4 - 2x^3 - x^2)$	$[0;0,8]$
21	$2x^5 - 8x^4 + 3x^3 - x + 2$	$[-1;0]$	$\ln^2(8+x)$	$[1;10]$

22	$2x^3 - 8x^2 - 16x + 15$	[0;1]	$\ln(8+x)^2$	[1;10]
23	$12x^4 - 16x^3 + 2x - 3$	[-1;0]	$\ln(8+\sqrt{x})$	[1;3]
24	$4x^3 - 12x^2 - 5x + 2$	[0;1]	$\sqrt{x} \cos(x)$	[0,4;1]
25	$x^4 + 2x^3 + x^2 + 8x - 8$	[0;1]	$\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$	[0;1]
26	$2x^3 - 3x^2 - 3x - 4$	[2;3]	$x \cdot \sin(x) + 0,1$	[0;0,5]

2.5 Лабораторна робота № 5

Розв'язання алгебраїчних рівнянь з комплексними коренями

Об'єкт – методи розв'язання алгебраїчних рівнянь з комплексними коренями. Предмет – чисельний метод “сліпого пошуку” розв'язання алгебраїчних рівнянь з комплексними коренями. Мета – опанування чисельним методом “сліпого пошуку” розв'язання алгебраїчних рівнянь з комплексними коренями.

Стислі теоретичні відомості

Основна теорема алгебри стверджує, що рівняння $P_n(x) = 0$, де у лівій частині знаходиться багаточлен (поліном) ступеню n , має рівно n коренів, частина з яких можуть збігатися, а частина можуть бути комплексними. Кількість комплексних коренів завжди є парною, при цьому пари утворюються комплексно спряженими коренями.

Комплексним числом зветься величина, яка може бути представлена у вигляді

$$z = a + i \cdot b; \quad i^2 = -1, \quad (2.5.1)$$

a, b – дійсні числа, які носять назву відповідно дійсної та уявної частин, i – уявна одиниця. Така форма подання комплексного числа носить назву алгебраїчної. Визначені функції виділення дійсної та уявної частин комплексного числа $a = \operatorname{Re}(z)$, $b = \operatorname{Im}(z)$.

Числа

$$z = a + i \cdot b; \quad \bar{z} = a - i \cdot b \quad (2.5.2)$$

звуться комплексно спряженими.

Якщо дійсне число має геометричне подання у вигляді точки на числовій прямій, то комплексне число – у вигляді точки на площині, координата якої за віссю абсцис дорівнює дійсній частині числа, а за віссю ординат – уявній.

Переходячи від декартової системи координат до полярної, комплексне число можна записати як

$$z = A \cdot [\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)]; \quad A = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \varphi = \operatorname{arctg} \left[\frac{b}{a} \right], \quad (2.5.3)$$

де A , φ – відповідно модуль та аргумент комплексного числа. Така форма подання комплексного числа носить назву тригонометричної.

З використанням формули Ейлера може бути отримана експоненційна форма подання комплексного числа

$$\exp(i \cdot \varphi) = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi); \quad z = A \cdot \exp(i \cdot \varphi). \quad (2.5.4)$$

Алгебраїчна форма є зручною для проведення операцій додавання і вирахування, а експоненційна – для операцій множення, ділення та зведення у ступень

$$\begin{cases} z_1 \pm z_2 = a_1 \pm a_2 + i \cdot (b_1 \pm b_2); & z_1 \cdot z_2 = A_1 \cdot A_2 \cdot \exp(\varphi_1 \pm \varphi_2); \\ z^n = A^n \cdot \exp(n \cdot \varphi). \end{cases} \quad (2.5.5)$$

З огляду на те, що простір подання дійсних чисел є одновимірним, а комплексних чисел – двовимірним, підходи до розв’язання алгебраїчних рівнянь з виключно дійсними та комплексними коренями є принципово різними. Задача чисельного розв’язання алгебраїчних рівнянь $f(z) = 0$, які мають комплексні корені, (визначення нулів функції комплексної змінної) є спорідненою до задач математичної оптимізації, які мають на меті визначення екстремумів функцій багатьох незалежних змінних за наявності обмежень на їх значення.

До основних груп чисельних ітераційних методів розв’язання таких задач відносяться:

- безградієнтні, які для пошуку розв’язку використовують тільки власно значення досліджуваної функції;
- градієнтні, які також вимагають знання похідної (часткових похідних) функції.

Окремою підгрупою безградієнтних методів є стохастичні методи, які в процесі пошуку координат точок початкового наближення, чергової ітерації чи напрямку руху в просторі рішень використовують послідовності псевдовипадкових чисел.

Кожний метод повинен визначати:

- координати точки початкового наближення в просторі рішень;
- координати точки наступної ітерації – пропозиції наступного наближення;

- критерій прийняття або відкидання пропозиції наступного наближення;
- критерій припинення ітерацій.

При виборі методу розв'язання задачі в кожному випадку повинні враховуватися такі чинники:

- особливості досліджуваної функції (належність до певного класу, якому притаманні певні властивості, наявність особливих точок, “оврагів”, імовірна локалізація нулів та їх передбачувана кількість);
- особливості області пошуку (зв'язність, опуклість);
- аналітична чи чисельна форма задання досліджуваної функції.

Далі розглядається метод “сліпого пошуку” комплексного кореня алгебраїчного рівняння $f(z) = 0$. Цей метод відноситься до стохастичних, є найменш чутливим до вищезазначених особливостей функцій і областей пошуку нулів. Передбачається, що в області пошуку гарантовано існує єдиний корінь рівняння. В методі використовується випадкове рівномірне розподілення точок наближень кореня в області пошуку і вибір найкращого з них.

Якщо пошук кореня здійснюється у прямокутній області з межами: $\text{Re}(z)_{\min}$, $\text{Re}(z)_{\max}$, $\text{Im}(z)_{\min}$, $\text{Im}(z)_{\max}$ для розіграшу координат точок початкового наближення та наступної ітерації може бути використана відома формула

$$\begin{cases} z_t = \text{Re}(z_t) + i \cdot \text{Im}(z_t); \\ \text{Re}(z_t) = \text{Re}(z)_{\min} + (\text{Re}(z)_{\max} - \text{Re}(z)_{\min}) \cdot \xi_1; \\ \text{Im}(z_t) = \text{Im}(z)_{\min} + (\text{Im}(z)_{\max} - \text{Im}(z)_{\min}) \cdot \xi_2, \end{cases} \quad (2.5.6)$$

де ξ_1 , ξ_2 – незалежні псевдовипадкові числа, які рівномірно розташовані на сегменті $[0,1]$. У разі коли пошук здійснюється у круговій області радіусом R з центром в точці z_0 , використовується співвідношення

$$z_t = z_0 + \sqrt{\xi_1} \cdot R \cdot [\cos(2 \cdot \pi \cdot \xi_2) + i \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot \xi_2)]. \quad (2.5.7)$$

Коли пошук здійснюється у верхньому (нижньому) напівкільці внутрішнім радіусом R_1 і зовнішнім – R_2 з центром в точці z_0 , попереднє співвідношення змінюється наступним чином

$$z_t = z_0 + \sqrt{R_1^2 + \xi_1 \cdot (R_2^2 - R_1^2)} \cdot [\cos(2 \cdot \pi \cdot \xi_2) \pm i \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot \xi_2)]. \quad (2.5.8)$$

Коли ж виникає необхідність пошуку на області більш складної форми, то може бути використаний метод відбору. При його застосуванні розіграш координат точок відбувається в прямокутній чи круговій області, в яку вписано область пошуку. Дали здійснюється перевірка належності отриманої точки до області пошуку. У разі належності точка приймається, у супротивному випадку – відкидається і робиться наступна спроба розіграшу.

При одній ітерації пошуку наближення кореня відбувається розіграш чергового наближення zt за вищезазначеними формулами і перевірка умови $f(zt) < f(z^*)$, де z^* – поточне збережене значення наближення. При невиконанні умови zt відкидається і розігрується його чергове значення, при виконанні zt приймається за нове поточне збережене значення наближення. Можна використовувати різні умови припинення ітерацій, наприклад: $|zt - z^*| < \Delta$ після виконання умови $f(zt) < f(z^*)$ або $f(z^*) < \delta$. Можливе також просте обмеження числа ітерацій.

Визначимо верхню граничну оцінку кількості ітерацій N , які необхідно здійснити для того, щоб із заданою ймовірністю p отримати наближення кореню рівняння $f(z)=0$, яке потрапляє у Δ -околицю його істинного значення. Ймовірність потрапляння наближення кореня у Δ -околицю його істинного значення на комплексній площині

$$p_0 = \frac{\pi \cdot \Delta^2}{S}. \quad (2.5.9)$$

де S – площа області пошуку.

Ймовірність потрапляння хоча б одного з N наближень першого кореню у Δ -околицю його істинного значення на комплексній площині становить

$$p = 1 - (1 - p_0)^N = 1 - \left(1 - \frac{\pi \cdot \Delta^2 \cdot KM}{S}\right)^N. \quad (2.5.10)$$

Звідки остаточно маємо

$$N = \frac{\ln(1-p)}{\ln\left(1 - \frac{\pi \cdot \Delta^2}{S}\right)} \approx -\frac{S}{\pi \cdot \Delta^2} \ln(1-p). \quad (2.5.11)$$

З іншого боку, верхня гранична похибка локалізації кореня для заданого числа ітерацій складе

$$\Delta = \sqrt{-\frac{S}{\pi \cdot N} \ln(1-p)}. \quad (2.5.12)$$

Якщо пошук кореня здійснюється у напівкільці, остання формула набуває вигляду

$$\Delta = \sqrt{\frac{R1^2 - R2^2}{2 \cdot N} \ln(1 - p)}. \quad (2.5.13)$$

Постановка задачі

Дано

Поліноміальна функція лівої частини алгебраїчного рівняння $f(z) = 0$, яке має комплексні корені, та параметри області пошуку кореня.

Потрібно

За допомогою чисельного ітераційного методу знайти комплексний корінь рівняння в області пошуку, перевірити отриманий результати за допомогою функцій середовища математичних розрахунків. Дослідити залежність похибки локалізації кореня від кількості ітерацій.

Рекомендації щодо виконання роботи

1. Для поліноміальної функції $f(x)$ з номером №, де № – порядковий номер здобувача вищої освіти за журналом, та заданої області локалізації кореня, методом “сліпого пошуку” обчислити наближене значення комплексного кореня рівняння $f(x) = 0$ при кількості випробувань $N = \{10^3, 10^4, 10^5\}$. Розрахунки провести для кореня, який розташований у напівкільці з центром у початку системи координат, внутрішнім радіусом $R1$ та зовнішнім $R2$. Для парних варіантів розглянути верхнє напівкільце (знайти корінь з додатною уявною частиною), а для непарних – нижнє напівкільце (знайти корінь з від’ємною уявною частиною).

2. З використанням середовища математичних розрахунків знайти всі корені рівняння $f(x) = 0$ за допомогою вбудованої функції. Для різних значень кількості випробувань N по п.1 обчислити значення абсолютної похибки визначення кореня Δ як модуль різниці між умовно точним значенням, що надається функцією polyroots та наближеним за методом “сліпого пошуку”. Побудувати в єдиному полі відповідний графік залежності похибки Δ від кількості випробувань N та графік теоретичної залежності цих величин, який визначається формулою (2.5.1), прийнявши при цьому значення ймовірності потрапляння випробування в Δ -околицю кореня як $p=0,9; 0,95, 0,99$. При побудуванні графіка відформатувати його осі в логарифмічних шкалах.

Вимоги до звіту

Звіт роботі повинен містити:

1. Назву дисципліни та лабораторної роботи.
2. Прізвище, ім’я та по батькові здобувача вищої освіти, шифр групи, номер варіанту.
3. Об’єкт, предмет і мету лабораторної роботи.
4. Вхідні дані: алгебраїчне рівняння, що розв’язується, та параметри області пошуку кореня.
5. Код програми, що реалізує поставлені завдання (додаток7).
6. Результати обчислення комплексного кореня рівняння.

7. Графіки залежностей: похибки чисельного методу “сліпого пошуку” для кількості ітерацій: $N = \{10^3, 10^4, 10^5\}$ та теоретичної верхньої граничної похибки локалізації кореня для зазначеної кількості ітерацій та значень імовірності потрапляння наближення рішення в околицю істинного рішення $p=0,9; 0,95, 0,99$.

8. Висновки.

Контрольні питання і завдання

1. Сформулюйте основну теорему алгебри.
2. Запишіть подання комплексного числа у алгебраїчній, тригонометричній та експоненційній формах і поясніть те, як вони пов'язані між собою.
3. Поставте у відповідність арифметичні операції та форми подання комплексного числа у яких зручно здійснювати ці операції, запишіть результати виконання таких операцій.
4. Сформулюйте мету задач математичної оптимізації, назвіть основні групи чисельних методів розв'язання таких задач та поясніть їх відмінності.
5. Вербально опишіть метод “сліпого пошуку” комплексного кореня алгебраїчного рівняння.
6. Які можуть бути критерії припинення ітерацій методу “сліпого пошуку” комплексного кореня алгебраїчного рівняння?
7. Запишіть формули для значення комплексного числа, яке рівномірно випадково розташовано в: прямокутній, круговій, напівкільцевій областях.
8. Отримайте аналітичний вираз для верхньої граничної похибки локалізації кореня для заданого числа ітерацій методу “сліпого пошуку”.

Варіанти завдань

Таблиця 2.5.1. Функція лівої частини алгебраїчного рівняння та параметри області пошуку кореня

№	Функція	Радіуси напівкільця $[R1;R2]$
1	$6x^3 - 5x^2 - 3x + 8$	$[1,1;1,2]$
2	$10x^4 - 15x - 5$	$[1;1,2]$
3	$x^4 - 16x^3 + 8x^2 + 5x + 4$	$[0,4;0,6]$
4	$x^4 - 8x^3 + x^2 + 3x - 4$	$[0,7;0,8]$
5	$5x^3 + 8x^2 + 10x + 3$	$[1,2;1,3]$
6	$7x^3 + 5x^2 - 13$	$[1,2;1,4]$
7	$5x^3 + 8x^2 + 20x + 3$	$[1,9;2]$
8	$3x^4 + 7x^3 + 5x^2 + 5x + 4$	$[0,85;0,95]$
9	$4x^4 + 15x - 13$	$[1,5;1,6]$
10	$3x^3 + 18x - 16$	$[2,5;2,6]$
11	$13x^3 - 6x^2 + 19x - 18$	$[1,25;1,35]$
12	$x^4 - 12x^3 - 18$	$[1,1;1,2]$

13	$6x^3 - 7x^2 + 4$	[0,9;1,1]
14	$3x^3 + 10x - 19$	[2,2;2,3]
15	$8x^4 - 11x^3 - 5x^2 + x - 10$	[0,7;0,9]
16	$3x^3 - 12x^2 + 12x - 8$	[0,9;1,0]
17	$5x^3 + 10x - 2$	[1,4;1,5]
18	$8x^3 - 14x - 12$	[0,9;1,0]
19	$4x^4 - 8x^3 - x^2 - 10x - 5$	[0,9;1,1]
20	$x^4 - 9x^2 - 7x - 3$	[0,5;0,6]
21	$2x^4 - 8x^3 + 3x^2 - x + 2$	[1;1,2]
22	$2x^3 - 8x^2 - 16x - 15$	[1;1,2]
23	$12x^4 - 16x^3 + 2x - 3$	[0,5;0,6]
24	$4x^3 - 12x^2 - 5x - 2$	[0,3;0,4]
25	$x^4 + 2x^3 + x^2 + 8x - 8$	[1,8;1,95]
26	$2x^3 - 3x^2 - 3x - 4$	[0,85;0,95]

2.6 Лабораторна робота № 6

Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Об'єкт – методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.
Предмет – чисельні методи розв'язання визначених систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Мета – опанування методами чисельного розв'язання визначених систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Стислі теоретичні відомості

В загальному вигляді система m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими в розгорнутому та матричному вигляді може бути представлена відповідно як

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ : \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}; \quad A \cdot \vec{x} = \vec{b}, \quad (2.6.1)$$

де $A = \{a_{ij}\}_{i=1..n; j=1..n}$ – матриця системи, $\vec{b} = \{b_i\}_{i=1..m}$ – вектор вільних членів, $\{x_j\}_{j=1..n}$ – вектор невідомих. Якщо до матриці системи праворуч додати вектор вільних членів, то така матриця буде зватися розширеною матрицею системи $A' = (A | \vec{b})$.

Рішенням системи рівнянь є вектор значень невідомих, які при підстановці в рівняння системи обертають їх на тотожності.

Система є сумісною, якщо вона має хоча б одне рішення, інакше вона є несумісною. Для того, щоб система була сумісною необхідно і достатньо, щоб ранг її матриці дорівнював рангу її розширеної матриці $r(A) = r(A')$. Під рангом матриці мається на увазі максимальний порядок її мінора, який відмінний від нуля.

Сумісна система є визначеною, якщо вона має єдине рішення, інакше вона є невизначеною. Якщо кількість рівнянь системи m дорівнює кількості невідомих n , система є визначеною, якщо ж $m < n$, система є невизначеною.

Для того, щоб система з n рівнянь з n невідомими була сумісною і визначеною необхідно і достатньо, щоб її визначник був відмінним від нуля $\det(A) \neq 0$. Далі у лабораторній роботі розглядаються тільки такі системи.

Найпростішим аналітичним методом розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь є матричний метод, який полягає у множенні обох частин рівняння системи у матричному вигляді на зворотну матрицю системи A^{-1}

$$A^{-1} \cdot A \cdot \vec{x} = E \cdot \vec{x} = \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}, \quad (2.6.2)$$

тут E – одинична матриця.

Іншим аналітичним методом розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь є метод Крамера, в якому невідомі визначаються як результат ділення їх визначників на визначник системи

$$x_j = \frac{\det(Ax_j)}{\det(A)}. \quad (2.6.3)$$

Визначники невідомих отримуються з визначника системи шляхом заміни стовбця, що відповідає коефіцієнтам шуканої змінної на стовбець вільних членів.

Аналітичні методи можуть бути застосовані при невеликій кількості рівнянь системи.

Чисельні методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь поділяють на прямі, які дають умовно точні результати за кінцеву кількість кроків обчислювального процесу і ітераційні в яких нескінченний обчислювальний процес обмежується досягненням неперевищеної похибки результату, яка для цих методів є обов'язковою для задання.

До прямих відносяться методи: Гаусса, Гаусса-Жордана, Холесського. Ці методи використовуються при відносно невеликій кількості рівнянь системи. Термін “умовно точні” означає, що у загальному випадку результат операції з дійсними числами є наближеним, що пов'язане з дискретністю представлення дійсних чисел у цифровому обчислювальному засобі на відміну від їх безперервного визначення у класичній математиці. Тобто у загальному випадку результат операції не завжди збігається з найближчим можливим дискретним представленням і, зведення результату до нього, викликає машинну похибку.

До ітераційних відносяться методи простої ітерації та Гаусса-Зейделя. Ці методи використовуються при великій кількості рівнянь системи і є особливо ефективними для систем з розрідженими матрицями. Такі системи рівнянь характерні домінуванням значень коефіцієнтів головної діагоналі, нульовими значеннями більшості решти коефіцієнтів, і є типовими для розв'язань завдань диференційних рівнянь в часткових похідних, які зводяться до систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Останні в таких задачах носять назву різницьових, оскільки кінцевими різницями апроксимують значення часткових похідних.

Розглянемо метод простої ітерації. Для цього запишемо систему лінійних рівнянь у вигляді

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1..n. \quad (2.6.4)$$

Вважаючи, що елементи головної діагоналі ненульові $a_{ii} \neq 0$, розв'язуємо кожне рівняння системи відносно змінної, яка міститься на головній діагоналі

$$x_i = \beta_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n \alpha_{ij} x_j; \quad \beta_i = \frac{b_i}{a_{ii}}; \quad \alpha_i = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}. \quad (2.6.5)$$

За перше наближення приймаються отримані значення вільних членів $x_i^1 = \beta_i$, які на наступному кроці ітерацій підставляються в рівняння (2.7.5). Ітерації продовжуються до досягнення наперед визначеного значення похибки результату Δ

$$\max_i |x_i^{k+1} - x_i^k| \leq \Delta. \quad (2.6.6)$$

Тут верхній індекс змінної дорівнює номеру кроку ітерацій. В іншому вигляді умова припинення ітераційного процесу може бути записана як

$$|\vec{x}^{k+1} - \vec{x}^k| \leq \Delta. \quad (2.6.7)$$

Достатньою умовою сходимості методу простої ітерації є домінування елементів головної діагоналі

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| < a_{ii}. \quad (2.6.8)$$

Умовно точний метод Гаусса є двоетапним і полягає в послідовному виключенні змінних з системи шляхом підстановки, що приводить до зведення її до “трикутної форми”. У результаті отримується одне лінійне рівняння з

однією невідомою, рішення якого є тривіальним. Цей етап отримав назву “прямої прогонки”. На другому етапі “зворотної прогонки” значення чергової невідомої отримується підстановкою значення попередньої невідомої в чергове рівняння. Так після першого кроку прямої прогонки, в припущенні що $a_{11} \neq 0$, система має вигляд

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j = b_1 \\ : \\ \sum_{j=2}^n a_{1j}^1 x_j = b_1^1 \quad i = 2..n \end{array} \right. ; a_{ij}^1 = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j}; b_i^1 = b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} b_1 \quad i = 2..n . \quad (2.6.9)$$

Після k -ого кроку прямої прогонки, в припущенні що $a_{kk}^{k-1} \neq 0$, система набуває вигляду

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=i}^n a_{ij}^{i-1} x_j = b_i^{i-1} \quad i = 1..k \quad ; a_{ij}^k = a_{ij}^{k-1} - \frac{a_{ik}^{k-1}}{a_{kk}^{k-1}} a_{kj}^{k-1} \\ : \\ \sum_{j=k+1}^n a_{1j}^k x_j = b_i^k \quad i = k+1..n \quad ; b_i^k = b_i^{k-1} - \frac{a_{ik}^{k-1}}{a_{kk}^{k-1}} b_i^{k-1} \end{array} \right. \quad i = k+1..n . \quad (2.6.10)$$

Тоді після $n-1$ -ого кроку прямої прогонки система і її останнє рівняння будуть мати вигляд

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}^{i-1} x_j = b_i^{i-1} \quad i = 1..n; \quad a_{nn}^{n-1} x_n = b_n^{n-1} . \quad (2.6.11)$$

Відповідно у результаті зворотної прогонки рішення системи лінійних рівнянь буде отримано за співвідношеннями

$$x_n = \frac{b_n^{n-1}}{a_{nn}^{n-1}}; \quad x_k = \frac{b_k^{k-1} - \sum_{j=k+1}^n a_{kj}^{k-1} x_j}{a_{kk}^{k-1}}; \quad k = n-1..1 . \quad (2.6.12)$$

Постановка задачі

Дано

Сумісна та визначена система лінійних алгебраїчних рівнянь.

Потрібно

Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь, використовуючи прямий та ітераційний чисельний методи, перевірити отримані результати за

допомогою функцій середовища математичних розрахунків та аналітичними методами. Дослідити залежність кількості ітерацій, які необхідні для досягнення заданої похибки рішення.

Рекомендації щодо виконання роботи

1. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь з номером №, де № – порядковий номер здобувача вищої освіти за журналом, методами простої ітерації та Гаусса. Розрахунки методом простої ітерації провести для величин абсолютної похибки $\Delta = \{10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}\}$ при нульовому початковому наближенні. Побудувати графік залежності кількості ітерацій k , які потрібні для досягнення потрібної похибки від величини похибки Δ .

2. Знайти рішення тієї ж системи лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою вбудованої функції середовища математичних розрахунків, розв'язуючого блока, матричним методом та методом Крамера.

3. Порівняти рішення системи лінійних алгебраїчних рівнянь, які отримані різними методами.

Вимоги до звіту

Звіт роботі повинен містити:

1. Назву дисципліни та лабораторної роботи.
2. Прізвище, ім'я та по батькові здобувача вищої освіти, шифр групи, номер варіанту.
3. Об'єкт, предмет і мету лабораторної роботи.
4. Вхідні дані: система лінійних алгебраїчних рівнянь, яка розв'язується.
5. Код програми, що реалізує поставлені завдання (додаток 8).
6. Результати рішення системи лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою методів простої ітерації та Гаусса, вбудованої функції середовища математичних розрахунків, розв'язуючого блока, матричним методом та методом Крамера.
7. Графік залежності кількості ітерацій, які необхідні для досягнення заданої похибки рішення.
8. Висновки.

Контрольні питання і завдання

1. Запишіть загальний вигляд системи лінійних рівнянь у розгорнутому та матричному виглядах та поясніть, що є її рішенням.
2. Дайте визначення алгебраїчного доповнення до елемента матриці. Запишіть матрицю розміром $3 \cdot 3$ і знайдіть її визначник шляхом розкладення за рядком або стовбцем.
3. Дайте визначення рангу матриці. В яких межах може змінюватися ранг прямокутної матриці розміром $m \cdot n$, якщо принаймні один її елемент є ненульовим?
4. Дайте визначення сумісності та визначеності системи лінійних рівнянь та сформулюйте критерії їх виконання.
5. Приведіть приклади несумісної та невизначеної систем лінійних рівнянь. Знайдіть аналітичний розв'язок невизначеної системи.
6. Опишіть аналітичні методи розв'язання систем лінійних рівнянь.

7. Запишіть сумісну і визначену систему з 2-х лінійних рівнянь і розв'яжіть її шляхом підстановки та методом Крамера.

8. Поясніть різницю між прямими та ітераційними чисельними методами розв'язання систем лінійних рівнянь.

9. Назвіть прямі та ітераційні чисельні методи розв'язання систем лінійних рівнянь і вкажіть особливості задач де вони застосовуються.

10. Вербально опишіть методи Гаусса та простих ітерацій для розв'язання систем лінійних рівнянь.

Варіанти завдань

Таблиця 2.6.1. Системи лінійних рівнянь

№	Система рівнянь	№	Система рівнянь
1	$3,7x_1 + 1,3x_2 + 1,3x_3 = 2,1$ $1,5x_1 + 4,7x_2 + 2,1x_3 = 1,7$ $2,1x_1 + 1,8x_2 + 5,7x_3 = 0,8$	14	$5,0x_1 + 2,1x_2 + 2,0x_3 = 5,0$ $2,0x_1 + 4,5x_2 - 1,0x_3 = 4,9$ $-2,0x_1 - 2,7x_2 + 6,0x_3 = 2,7$
2	$4,7x_1 + 2,8x_2 + 1,9x_3 = 0,7$ $1,1x_1 + 3,4x_2 + 1,8x_3 = 1,1$ $4,2x_1 - 1,7x_2 + 9,3x_3 = 2,8$	15	$9,0x_1 + 3,2x_2 - 4,0x_3 = 7,0$ $2,8x_1 - 6,0x_2 + 2,0x_3 = 5,0$ $1,8x_1 + 4,0x_2 - 9,0x_3 = 5,0$
3	$3,1x_1 + 0,8x_2 + 1,9x_3 = 0,2$ $1,9x_1 + 4,1x_2 + 1,1x_3 = 2,1$ $2,5x_1 + 3,8x_2 + 9,3x_3 = 5,6$	16	$8,7x_1 - 2,0x_2 + 4,5x_3 = 2,0$ $1,0x_1 + 4,0x_2 - 1,8x_3 = 3,0$ $1,6x_1 + 3,0x_2 + 6,3x_3 = -2,0$
4	$9,1x_1 + 4,6x_2 + 2,8x_3 = 9,8$ $1,8x_1 + 5,1x_2 + 2,3x_3 = 6,7$ $3,1x_1 + 2,7x_2 + 7,2x_3 = 5,8$	17	$3,7x_1 + 0,9x_2 - 1,5x_3 = 3,5$ $2,5x_1 - 8,8x_2 + 3,7x_3 = 2,6$ $2,1x_1 + 3,7x_2 - 7,4x_3 = -0,4$
5	$3,3x_1 + 1,1x_2 + 1,5x_3 = 0,8$ $3,7x_1 + 8,7x_2 + 2,8x_3 = 5,7$ $2,7x_1 + 1,8x_2 + 7,1x_3 = 3,2$	18	$5,3x_1 - 0,7x_2 + 1,1x_3 = 5,0$ $1,2x_1 + 6,1x_2 - 1,3x_3 = 6,0$ $2,1x_1 - 1,4x_2 + 9,7x_3 = 10,0$
6	$7,6x_1 + 3,8x_2 + 2,7x_3 = 10,1$ $1,8x_1 + 4,1x_2 + 1,7x_3 = 9,7$ $1,2x_1 + 1,1x_2 + 3,8x_3 = 7,8$	19	$8,6x_1 + 1,8x_2 - 4,7x_3 = 3,8$ $0,7x_1 - 3,6x_2 + 1,9x_3 = 0,4$ $1,3x_1 + 4,5x_2 + 9,3x_3 = -1,6$
7	$3,8x_1 - 1,5x_2 + 1,1x_3 = 6,5$ $0,5x_1 + 3,8x_2 + 1,7x_3 = 0,5$ $1,2x_1 + 2,3x_2 - 4,5x_3 = 4,3$	20	$1,2x_1 + 0,3x_2 - 0,5x_3 = 1,7$ $1,3x_1 + 9,7x_2 - 1,8x_3 = 7,8$ $0,8x_1 + 4,1x_2 + 9,1x_3 = 5,4$
8	$5,4x_1 - 2,3x_2 + 1,4x_3 = -3,5$ $2,2x_1 + 7,7x_2 - 3,3x_3 = 2,7$ $3,4x_1 + 2,4x_2 + 7,8x_3 = 1,9$	21	$9,4x_1 - 6,2x_2 - 0,5x_3 = 0,52$ $3,4x_1 + 8,3x_2 + 0,8x_3 = -0,8$ $1,4x_1 - 1,1x_2 + 3,8x_3 = 1,8$

9	$7,8x_1 + 2,3x_2 + 3,8x_3 = 1,8$ $3,3x_1 + 7,1x_2 + 1,8x_3 = 2,3$ $2,5x_1 + 3,3x_2 + 6,8x_3 = 3,4$	22	$6,3x_1 + 3,0x_2 - 1,6x_3 = 1,0$ $2,4x_1 - 7,0x_2 + 2,4x_3 = 2,0$ $0,8x_1 + 1,0x_2 + 3,5x_3 = -2,0$
10	$3,8x_1 + 2,1x_2 - 1,3x_3 = 4,8$ $-2,1x_1 + 5,9x_2 + 1,8x_3 = 3,3$ $1,8x_1 + 1,1x_2 - 4,1x_3 = 3,8$	23	$9,5x_1 - 3,5x_2 + 2,4x_3 = 2,5$ $3,1x_1 - 8,6x_2 - 2,3x_3 = -1,5$ $1,8x_1 + 5,4x_2 - 9,5x_3 = 6,4$
11	$5,7x_1 - 2,2x_2 + 2,0x_3 = 1,8$ $2,1x_1 + 6,9x_2 - 2,3x_3 = 2,8$ $1,2x_1 + 2,9x_2 - 5,1x_3 = 5,1$	24	$4,8x_1 - 1,2x_2 + 1,4x_3 = 5,1$ $2,7x_1 + 9,8x_2 + 3,1x_3 = 10,2$ $1,8x_1 - 1,3x_2 + 4,7x_3 = 4,7$
12	$5,8x_1 + 1,3x_2 - 2,2x_3 = 4,5$ $2,5x_1 - 7,8x_2 + 3,3x_3 = 7,1$ $4,5x_1 - 3,1x_2 + 9,8x_3 = 6,1$	25	$5,6x_1 + 1,7x_2 - 1,7x_3 = 1,9$ $3,4x_1 - 9,6x_2 - 4,7x_3 = -2,4$ $1,8x_1 + 1,3x_2 + 5,7x_3 = 1,2$
13	$7,1x_1 + 2,8x_2 + 3,1x_3 = 7,0$ $3,0x_1 + 9,8x_2 + 4,3x_3 = 6,1$ $3,2x_1 + 2,8x_2 + 8,1x_3 = 5,8$	26	$6,2x_1 + 1,3x_2 - 0,7x_3 = 2,3$ $0,4x_1 + 5,7x_2 + 1,3x_3 = 1,9$ $2,1x_1 + 0,7x_2 + 4,4x_3 = 1,0$

2.7 Лабораторна робота № 7

Розв'язання звичайних диференціальних рівнянь

Об'єкт – методи розв'язання звичайних диференціальних рівнянь. Предмет – чисельні методи розв'язання задач Коши для звичайних диференціальних рівнянь першого порядку. Мета – опанування методами чисельного розв'язання задач Коши для звичайних диференціальних рівнянь.

Стислі теоретичні відомості

Звичайне диференціальне рівняння (ЗДР) k -го порядку – це рівняння, яке включає в себе незалежну змінну x , шукану функцію y , може включати будь-які її похідні порядків до n -го включно, і може бути зведено до вигляду

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (2.7.1)$$

Якщо ЗДР лінійно відносно шуканої функції і всіх її похідних, воно зветься лінійним. Якщо доданок ЗДР, який не залежить від шуканої функції і всіх її похідних, дорівнює нулю, таке ЗДР зветься однорідним.

Будь-яке ЗДР k -го порядку вигляду

$$y^{(n)} = F(x, y, y', y'', \dots, y^{(k)}, \dots, y^{(n-1)}). \quad (2.7.2)$$

може бути зведено до системи з k ЗДР першого порядку шляхом підстановки

$$\begin{cases} y'_0 = y_1 \\ y'_1 = y_2 \\ : \\ y'_{n-2} = y_{n-1} \\ y'_{n-1} = F(y_0, \dots, y_k, \dots, y_{n-1}, x) \end{cases} \quad (2.7.3)$$

Рішенням ЗДР є функція незалежної змінної, яка при підстановці в рівняння обертає його на тотожність. Процес побудування рішення диференційного рівняння носить назву його інтегрування. Розрізняють загальні та часткові рішення. Часткові рішення представляють собою визначені функції, а загальні – сімейства функцій, які відрізняються k константами, де k – порядок рівняння. Часткове рішення може бути отримане з загального шляхом накладення на рішення k додаткових умов. Це можуть бути або значення функції-рішення та її похідних порядків до $k-1$ -го включно при певному значенні незалежної змінної (за звичай на початку сегменту інтегрування), або значення функції-рішення для k значень незалежної змінної. Умови першого типу носять назву початкових, а другого – граничних. Сукупність ЗДР та початкових умов носить назву задачі Коши, а ЗДР та граничних умов – крайової задачі. Чисельні методи розв'язання ЗДР дозволяють отримувати тільки часткові рішення. Загальні рішення знаходяться тільки аналітично. Наприклад, для ЗДР першого порядку з розділеними змінними, загальне рішення можна отримати шляхом групування залежних і незалежних змінних в різних частинах рівняння і його інтегрування з наступним потенціюванням.

$$y' = \frac{dy}{dx} = y; \quad \frac{dy}{y} = dx; \quad \ln(y) = x + C; \quad y = \tilde{C} \cdot \exp(x). \quad (2.7.4)$$

Накладання початкової умови $y(0)=1$, дозволяє отримати часткове рішення

$$y(0) = \tilde{C} \cdot \exp(0) = 1; \quad \tilde{C} = 1; \quad y(x) = \exp(x). \quad (2.7.5)$$

яке задовольняє як власно рівнянню, так і початковій умові.

Задача Коши для ЗДР має вигляд

$$\begin{cases} y' = f(y, x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (2.7.6)$$

Тут друге рівняння системи є початковою умовою.

Задача Коши для системи з m ЗДР в векторному та розгорнутому виглядах записується як

$$\begin{cases} \vec{y}' = \vec{f}(\vec{y}, x) \\ \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0 \end{cases} \quad (2.7.7)$$

$$\begin{cases} y_1' = f_1(y_{i1}, \dots, y_{ij}, \dots, y_{im}, x) \\ \vdots \\ y_l' = f_m(y_{i1}, \dots, y_{ij}, \dots, y_{im}, x) \\ y_1(x_0) = y_{01} \\ \vdots \\ y_m(x_0) = y_{0m} \end{cases} \quad (2.7.8)$$

Метод Ейлера для задачі Коши впливає з найпростішої формули чисельного диференціювання

$$\begin{aligned} y' &= f(y_i, x_i); \quad y' = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}; \\ y_{i+1} &= y_i + h \cdot f(y_i, x_i). \end{aligned} \quad (2.7.9)$$

тут $[x_0; x_n]$ – сегмент інтегрування, n – кількість кроків інтегрування, h – величина кроку інтегрування.

Відповідно метод Ейлера для задачі Коши системи з m ЗДР в векторному та розгорнутому виглядах записується як

$$\vec{y}_{i+1} = \vec{y}_i + h \cdot \vec{f}(\vec{y}_i, x_i). \quad (2.7.10)$$

$$\begin{cases} y_{i+11} = y_{i1} + h \cdot f_1(y_{i1}, \dots, y_{ij}, \dots, y_{im}, x_i) \\ \vdots \\ y_{i+1j} = y_{ij} + h \cdot f_j(y_{i1}, \dots, y_{ij}, \dots, y_{im}, x_i) \\ \vdots \\ y_{i+1m} = y_{im} + h \cdot f_m(y_{i1}, \dots, y_{ij}, \dots, y_{im}, x_i) \end{cases} \quad (2.7.11)$$

Тобто процес побудування рішення носить рекурентний характер. У зв'язку з цим, крок інтегрування повинен бути досить малим. В протилежному випадку похибка, яка виникає при заміні похідної шуканої функції кінцевою різницею, накопичується, результат інтегрування швидко зростає і у підсумку перевищує максимально припустиме значення типу даних у якому він представляється. Таке явище носить назву розбіжності рішення.

Для зменшення кількості кроків інтегрування (збільшення величини кроку інтегрування) при збереженні збіжності рішення використовують модифікації методу Ейлера, а саме виправлений метод Ейлера

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{2} \cdot (K1_i + K2_i); & K1_i &= f(y_i, x_i); \\ K2_i &= f\left(y_i + h \cdot K1_i, x_i + h\right). \end{aligned} \quad (2.7.12)$$

Модифікований метод Ейлера

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + h \cdot K2_i; & K1_i &= f(y_i, x_i); \\ K2_i &= f\left(y_i + \frac{h}{2} \cdot K1_i, x_i + \frac{h}{2}\right). \end{aligned} \quad (2.7.13)$$

Метод Рунге-Кутта

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{6} \cdot (K1_i + 2K2_i + 2K3_i + K4_i); & K1_i &= f(y_i, x_i); \\ K2_i &= f\left(y_i + \frac{h \cdot K1_i}{2}, x_i + \frac{h}{2}\right); \\ K3_i &= f\left(y_i + \frac{h \cdot K2_i}{2}, x_i + \frac{h}{2}\right); \\ K4_i &= f(y_i + h \cdot K3_i, x_i + h). \end{aligned} \quad (2.7.14)$$

Чисельні методи розв'язання крайових задач ЗДР ґрунтуються на апроксимації похідних кінцевими різницями, з використанням формул чисельного диференціювання, та представленні диференційного рівняння у вигляді низки лінійних рівнянь. Система лінійних рівнянь записується в цілому з її наступним розв'язанням з використанням методів, які були розглянуті в попередній роботі. Ці методи розв'язання ЗДР отримали назву сіткових, оскільки пошук рішення здійснюється на сітці, вузли якої відповідають певним крокам інтегрування за незалежними змінними. Значення шуканої функції в деяких вузлах до початку інтегрування задаються граничними умовами, а в інших – визначаються в процесі інтегрування на підставі значень в сусідніх вузлах, які вже відомі на поточному кроці інтегрування.

Розглянемо різницеву схему інтегрування ЗДР $y'' + q(x) \cdot y' - p(x) \cdot y = r(x)$ на сегменті $[x_0; x_n]$, з граничними умовами $y(x_0)=y_0$, $y(x_n)=y_n$. При цьому $p(x)$ приймає невід'ємні значення.

Різницеві апроксимації похідних мають вигляд (2.1.1, 2.1.2)

$$y'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}; \quad h = \frac{x_n - x_0}{n}; \quad 1 \leq i \leq n-1; \quad (2.7.15)$$

$$y''(x_i) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}.$$

Підставляючи різницеві апроксимації похідних в ЗДР, маємо

$$(2 + q_i h)y_{i+1} - (4 + p_i h^2)y_i + (2 - q_i h)y_{i-1} = 2r_i h^2. \quad (2.7.16)$$

Групуючи відомі змінні, значення яких задаються граничними умовами, у правій частині, а невідомі – в лівій і, приводячи систему до матричного вигляду, можна отримати

$$\begin{pmatrix} -(4 + 2p_1 h^2) & 2 + q_1 h & .. & & \\ 2 - q_2 h & -(4 + 2p_2 h^2) & .. & & \\ : & : & .. & : & : \\ & & .. & -(4 + 2p_{n-2} h^2) & 2 + q_{n-2} h \\ & & .. & 2 - q_{n-1} h & -(4 + 2p_{n-1} h^2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ : \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \quad (2.7.17)$$

$$\begin{pmatrix} 2r_1 h^2 - (2 - q_1 h)y_0 \\ 2r_2 h^2 \\ : \\ 2r_{n-2} h^2 \\ 2r_{n-1} h^2 - (2 + q_{n-1} h)y_n \end{pmatrix}.$$

Якщо ЗДР є лінійним, однорідним і має сталі коефіцієнти, його аналітичне рівняння може бути отримане за допомогою теореми Ейлера, яка формулюється наступним чином. Для того, щоб функція $y(x) = C_0 \exp(\lambda_0 x)$ була розв'язком рівняння

$$y^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j y^{(j)} = 0, \quad (2.7.18)$$

необхідно і достатньо, щоб число λ_0 було коренем характеристичного рівняння

$$\lambda^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j \lambda^j = 0. \quad (2.7.19)$$

З теореми Ейлера випливає таке твердження. Якщо $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ різні дійсні корені характеристичного рівняння лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами, то загальне рішення рівняння має вигляд

$$y(x) = \sum_{j=1}^n C_j \exp(\lambda_j x). \quad (2.7.20)$$

Тоді для ЗДР $y'' + q \cdot y' - p \cdot y = 0$ загальне рішення має вигляд $y(x) = C_1 \exp(\lambda_1 x) + C_2 \exp(\lambda_2 x)$, де

$$\lambda_{1,2} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + p}. \quad (2.7.21)$$

Постановка задачі

Дано

ЗДР першого порядку, сегмент інтегрування та початкова умова, ЗДР другого порядку, сегмент інтегрування та граничні умови.

Потрібно

Знайти часткові рішення ЗДР різними чисельним методами та за допомогою функцій середовища математичних розрахунків.

Рекомендації щодо виконання роботи

1. Для заданих: звичайного диференціального рівняння першого порядку в формі Коши $y' = f(y, x)$, сегменту інтегрування $[x_0; x_n]$ та початкової умови $y(0) = y_0$ з номером №С, де №С – порядковий номер здобувача вищої освіти за журналом, розв'язати задачу Коши шляхом інтегрування методом Ейлера, а також методом з номером $(\text{№С} + \text{№Г}) \bmod 3 + 1$, де №Г – порядковий номер групи, а методи мають номери: 1 – модифікований метод Ейлера, 2 – виправлений метод Ейлера, 3 – метод Рунге-Кутта. Побудувати графік функцій-рішень. Вибрати кількість кроків інтегрування $n = 10$.

2. З використанням середовища математичних розрахунків провести інтегрування рівняння за допомогою вбудованих функцій і умов п. 1 та побудувати графік функцій-рішень. Порівняти результати, що отримані за п. 1 та 2 шляхом розміщення графіків отриманих функцій рішення в єдиному графічному полі.

3. Для однорідного лінійного ЗДР другого порядку з постійними коефіцієнтами $y'' + q \cdot y' - p \cdot y = 0$ розв'язати крайову задачу шляхом її зведення до системи різницьових рівнянь. Вибрати: значення коефіцієнтів рівняння $q = (\text{№С} + \text{№Г}) \bmod 2 + 1$, $p = (\text{№С} + \text{№Г}) \bmod 9 + 1$, сегмент інтегрування $[x_0; x_n] = [0; 1]$, граничні умови $y(x_0) = \text{№С}$, $y(x_n) = 27 - \text{№С}$, кількість внутрішніх вузлів сітки $n - 1 = (\text{№С} + \text{№Г}) \bmod 3 + 2$. Побудувати графік функції-рішення.

4. Знайти функцію-рішення рівняння за умов п.3 аналітичним методом, використовуючи характеристичне рівняння. Побудувати графік функції-рішення.

5. З використанням середовища математичних розрахунків провести інтегрування рівняння за допомогою вбудованих функцій і умов п. 3 та побудувати графік функції-рішення. Порівняти результати, що отримані за п. 3, 4 та 5 шляхом розміщення графіків отриманих функцій рішення в єдиному графічному полі.

Вимоги до звіту

Звіт роботі повинен містити:

1. Назву дисципліни та лабораторної роботи.
2. Прізвище, ім'я та по батькові здобувача вищої освіти, шифр групи, номер варіанту.
3. Об'єкт, предмет і мету лабораторної роботи.
4. Вхідні дані: ЗДР першого порядку, сегмент інтегрування та початкову умову.
5. Код програми, що реалізує поставлені завдання (додаток 9).
6. Результати обчислення часткових рішень задачі Коши для ЗДР за допомогою: метода Ейлера, іншого метода інтегрування за варіантом, а також вбудованих функцій середовища математичних розрахунків у вигляді графіків отриманих функцій рішення в єдиному графічному полі.
7. Результати обчислення часткових рішень крайової задачі для ЗДР за допомогою: чисельного та аналітичного методів, а також вбудованої функції середовища математичних розрахунків у вигляді графіків отриманих функцій рішення в єдиному графічному полі.
8. Висновки.

Контрольні питання і завдання

1. Дайте визначення ЗДР n -го порядку.
2. Дайте визначення лінійного і однорідного ЗДР.
3. Запишіть ЗДР другого порядку і зведіть його до системи ЗДР першого порядку.
4. Поясніть, у чому полягає різниця між загальним та частковим рішеннями ЗДР.
5. Приведіть приклад постановки задачі Коши для ЗДР першого порядку, яка допускає аналітичне розв'язання. Знайдіть для неї загальне та часткове рішення.
6. Поясніть, у чому полягає різниця між початковими та граничними умовами для ЗДР.
7. Отримайте формулу Ейлера для чисельного рішення ЗДР з найпростішої формули чисельного диференціювання.
8. Поясніть, у чому полягає явище розбіжності чисельного рішення ЗДР і які його причини.
9. Поясніть, яким чином може бути усунуте явище розбіжності чисельного рішення ЗДР.

Варіанти завдань

Таблиця 2.7.1. Задачі Коши для ЗДР першого порядку

№	Диференційне рівняння	Сегмент інтегрування	Початкова умова
1	$y' = \sqrt{x^2 + y^2}$	$[3;5]$	$y(3) = 0$
2	$y' = \exp(-y) + 2x^2$	$[1;5]$	$y(1) = 2$
3	$y' = \sin(x) + y^2$	$[0;3]$	$y(0) = 0$
4	$y' = y - 4x + 3$	$[0;2.5]$	$y(0) = 3$
5	$y' = x^2 + y^2$	$[0;1.5]$	$y(0) = 0$
6	$y' = 4y(1+x)$	$[0;2]$	$y(0) = 1$
7	$y' = x - y$	$[0;1.5]$	$y(0) = 1$
8	$y' = y + 3x$	$[0;0.5]$	$y(0) = -1$
9	$y' = x - 2y$	$[0;1]$	$y(0) = 0$
10	$y' = y - \frac{2x}{y}$	$[0;1.7]$	$y(0) = 1$
11	$y' = x + y^2$	$[1;2]$	$y(1) = 1$
12	$y' = x^2 - y$	$[0;1]$	$y(0) = 2$
13	$y' = 2x - y$	$[0;2]$	$y(0) = 1$
14	$y' = 2x \cdot y$	$[0;1]$	$y(0) = 1$
15	$y' = \frac{x \cdot y}{(1-x^2)}$	$[0;0.5]$	$y(0) = 1$
16	$y' = x \cdot y^3$	$[0;1.5]$	$y(0) = 1$
17	$y' = 2x \cdot y^2$	$[0;1.2]$	$y(0) = 1$
18	$y' = x + \cos\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)$	$[1.2;2.2]$	$y(1.2) = 2.1$
19	$y' = x + \sin\left(\frac{y}{e}\right)$	$[1.4;2.4]$	$y(1.4) = 2.5$
20	$y' = x + 1 + \sin(y)$	$[0;2]$	$y(0) = 1$
21	$y' = 3x \cdot y - 5x + 2$	$[0;0.8]$	$y(0) = 0$
22	$y' = x^2 + \sin(y)$	$[0;1]$	$y(0) = 0.7$
23	$y' = \sin(y) + 2 + x^2$	$[0;2]$	$y(0) = 1$
24	$y' = y - 4x + 3$	$[0;1]$	$y(0) = 3$
25	$y' = 4y + 4x \cdot y$	$[0;2]$	$y(0) = 1$
26	$y' = \cos(y) + \sin(x)$	$[0;1]$	$y(0) = 1$

2.8 Лабораторна робота № 8

Розв'язання диференційних рівнянь у часткових похідних

Об'єкт – методи розв'язання диференційних рівнянь у часткових похідних.

Предмет – чисельні методи розв'язання диференційних рівнянь у часткових похідних другого порядку. Мета – опанування методами чисельного розв'язання диференційних рівнянь у часткових похідних другого порядку.

Стислі теоретичні відомості

Диференційним рівнянням у часткових похідних (ДРЧП) k -ого порядку зветься вираз

$$F\left(x_1, \dots, x_r, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_r}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_r}, \dots, \frac{\partial^{(j)} u}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_j}}, \dots, \frac{\partial^{(k)} u}{\partial x_r^{(k)}}\right) = 0, \quad (2.8.1)$$

де $\vec{x} = \{x_1, \dots, x_r\}$ – незалежні змінні, $u = u(x_1, \dots, x_r)$ – шукана функція, що є рішенням рівняння, $\vec{i} = \{i_1, \dots, i_j\}$ – індекси незалежних змінних, які можуть приймати довільні значення на сегменті $[1; r]$. Тобто аргументами функції F є: незалежні змінні, шукана функція і її всілякі похідні порядку до k включно.

Далі розглядаються рівняння другого порядку, які описують певні фізичні явища і відносяться до рівнянь математичної фізики. Опишемо їх класифікацію. Для цього представимо рівняння другого порядку у вигляді

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0. \quad (2.8.2)$$

Якщо $B^2 - A \cdot C > 0$, рівняння мають гіперболічний тип. Такі рівняння описують коливання та хвильові процеси. Зокрема коливання струни описуються рівнянням

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (2.8.3)$$

Тут $B=0$, $A=a^2$, $C=-1$.

Якщо $B^2 - A \cdot C = 0$, рівняння мають параболічний тип. Такі рівняння описують процеси дифузії, в'язкості, та теплопровідності. Зокрема остигання стрижня описуються рівнянням

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (2.8.4)$$

Тут $B=0$, $A=a^2$, $C=0$.

Якщо $B^2 - A \cdot C < 0$, рівняння мають еліптичний тип. Такі рівняння описують, зокрема, розподіл електричного поля всередині замкненої області де можуть бути присутні електричні заряди, а границя області може мати певний розподіл електричного потенціалу. Для двовимірного випадку вказане рівняння має вигляд

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y). \quad (2.8.5)$$

Тут $B=0, A=1, C=1$. Рівняння (2.8.5) є неоднорідним і носить назву рівняння Пуассона. Якщо його права частина дорівнює нулю, воно є однорідним і носить назву рівняння Лапласа.

Якщо одна зі змінних є часом, рівняння є нестационарним. Наведені рівняння гіперболічного та параболічного типів є нестационарними, а еліптичного типу – стаціонарним.

Як і для ЗДР, для ДРЧП розрізняють часткові та загальні рішення. Частковим рішенням диференційного рівняння є функція незалежних змінних, яка при підстановці в рівняння обертає його на тотожність. Загальним рішенням диференційного рівняння є сімейство функцій незалежних змінних. При підстановці будь-якої функції сімейства в рівняння, останнє обертається на тотожність. Це справедливо як для ЗДР, так і для ДРЧП. Але якщо для ЗДР функції сімейства розрізнялися множиною констант, то для ДРЧП, в загальному випадку вони розрізняються множиною функцій незалежних змінних. Часткові рішення отримуються з загальних шляхом накладення на шукану функцію додаткових умов. Оскільки для розглянутих вище рівнянь незалежними змінними виступають просторові координати і, можливо, час, розрізняють граничні та початкові умови. Перші задають часові (для нестационарних рівнянь) та просторові залежності значення шуканої функції (задачі Діріхле) або її похідної за просторовими координатами (задачі Неймана) на границі області пошуку рішення, другі – залежності значення шуканої функції або, можливо, її похідної за часом від просторових координат в певний момент часу. Так загальне рішення рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \exp(-x) \quad (2.8.6)$$

можна отримати шляхом двократного інтегрування за часовою координатою, а саме

$$\frac{\partial u}{\partial t} = t \cdot \exp(-x) + \varphi(x); \quad u(t, x) = \frac{t^2}{2} \cdot \exp(-x) + t \cdot \varphi(x) + \psi(x), \quad (2.8.7)$$

де $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – довільні функції. Задаючи початкові умови для шуканої функції

і її похідної, можна отримати часткове рішення, яке задовольняє як власно рівнянню, так і накладеним умовам.

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \cos(x); \quad \varphi(x) = \cos(x); \quad u(0, x) = \sin(x); \quad \psi(x) = \sin(x), \quad (2.8.8)$$

тоді остаточно часткове рішення набуває вигляду

$$u(t, x) = \frac{t^2}{2} \cdot \exp(-x) + t \cdot \cos(x) + \sin(x). \quad (2.8.9)$$

Як і для ЗДР, для ДРЧП чисельні методи, на відміну від аналітичних, дозволяють отримувати тільки часткові рішення.

Чисельні методи розв'язання ДРЧП ґрунтуються на апроксимації часткових похідних кінцевими різницями, з використанням формул чисельного диференціювання, та представленні диференційного рівняння у вигляді низки лінійних рівнянь. Ці рівняння або в явному вигляді виражають невідомі значення шуканої функції через відомі і рекурентно розв'язуються – такий підхід використовується для рівнянь гіперболічного та параболічного типів. Або ж система лінійних рівнянь записується в цілому з її наступним розв'язанням з використанням ітераційних методів – такий підхід використовується для рівнянь еліптичного типу. Ці методи розв'язання ДРЧП отримали назву сіткових, оскільки пошук рішення здійснюється на сітці, вузли якої відповідають певним крокам інтегрування за незалежними змінними. Значення шуканої функції в деяких вузлах до початку інтегрування задаються граничними та/або початковими умовами, а в інших – визначаються в процесі інтегрування на підставі значень в сусідніх вузлах, які вже відомі на поточному кроці інтегрування.

Розглянемо різницеву схему інтегрування гіперболічного рівняння (2.8.3) з початковими та граничними умовами

$$u(0, x) = \varphi(x); \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x); \quad 0 \leq x \leq L; \quad u(t, 0) = v(t); \quad u(t, L) = w(t); \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.8.10)$$

де T , L – розміри області пошуку рішення за часом та подовжньою координатою. Функції $\varphi(x)$, $\psi(x)$ мають фізичний сенс залежностей поперечного відхилення елементів струни від стану рівноваги і швидкості елементів струни від подовжньої координати в початковий момент часу, а функції $v(t)$, $w(t)$ – залежностей поперечного відхилення кінців струни від часу. Шукана функція $u(t, x)$ має сенс залежності поперечного відхилення кінців струни від часу та подовжньої координати. Якщо кінці закріплені, останні функції дорівнюють нулю.

Різницеві апроксимації часткових похідних мають вигляд (2.2.3)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\Delta t^2} \cdot (u_{i+1j} - 2u_{ij} + u_{i-1j}); & \Delta t = \frac{T}{n}; \quad 1 \leq i \leq n-1; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\Delta x^2} \cdot (u_{ij+1} - 2u_{ij} + u_{ij-1}); & \Delta x = \frac{L}{m}; \quad 1 \leq j \leq m-1. \end{cases} \quad (2.8.11)$$

де n, m – число кроків інтегрування за часом та подовжньою координатою, $\Delta T, \Delta L$ – відповідні величини кроків.

Після підстановки в рівняння (2.8.3) апроксимацій похідних, різницеві рівняння набувають остаточного вигляду

$$u_{i+1j} = 2u_{ij} \left[1 - \left(\frac{a \cdot \Delta t}{\Delta x} \right)^2 \right] - u_{i-1j} + (u_{ij+1} + u_{ij-1}) \cdot \left(\frac{a \cdot \Delta t}{\Delta x} \right)^2. \quad (2.8.12)$$

Необхідною умовою збіжності процесу інтегрування є нерівність

$$\left(\frac{a \cdot \Delta t}{\Delta x} \right)^2 \leq 1. \quad (2.8.13)$$

Початкові та граничні умови в дискретизованому вигляді записуються як

$$\begin{cases} u_{0j} = \varphi(j \cdot \Delta x); & u_{1j} = \varphi(j \cdot \Delta x) + \Delta t \cdot \psi(j \cdot \Delta x); \\ u_{i0} = v(i \cdot \Delta t); & u_{im} = w(i \cdot \Delta t). \end{cases} \quad (2.8.14)$$

Аналітичне рішення гіперболічного рівняння (2.8.3) для випадку закріплених кінців має вигляд

$$\begin{cases} u(t, x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[b_k \cos\left(\frac{k \cdot \pi \cdot a \cdot t}{L}\right) + c_k \sin\left(\frac{k \cdot \pi \cdot a \cdot t}{L}\right) \right] \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi \cdot x}{L}\right); \\ b_k = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi \cdot x}{L}\right) dx; & c_k = \frac{2}{k \cdot \pi \cdot a} \int_0^L \psi(x) \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi \cdot x}{L}\right) dx. \end{cases} \quad (2.8.15)$$

Тепер аналогічним чином розглянемо різницеву схему інтегрування параболічного рівняння (2.8.4) для випадку задачі остигання стрижня. Початкові та граничні умови мають вигляд

$$u(0, x) = \varphi(x); \quad 0 \leq x \leq L; \quad u(t, 0) = v(t); \quad u(t, L) = w(t); \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.8.16)$$

Тут фізичний сенс багатьох величин збігається з випадком рівняння коливання струни, але функції $u(t, x)$, $\varphi(x)$, $v(t)$, $w(t)$ характеризують

залежності не поперечного відхилення елемента струни від стану рівноваги, а температуру елемента стрижня.

Різницева апроксимація часткової похідної за часом має вигляд (2.2.1)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t} \cdot (u_{i+1j} - u_{ij}); \quad 0 \leq i \leq n-1. \quad (2.8.17)$$

Після підстановки в рівняння (2.8.3) апроксимацій похідних, різницеві рівняння набувають остаточного вигляду

$$u_{i+1j} = u_{ij} \left[1 - 2 \cdot \Delta t \left(\frac{a}{\Delta x} \right)^2 \right] + (u_{ij+1} + u_{ij-1}) \cdot \Delta t \left(\frac{a}{\Delta x} \right)^2. \quad (2.8.18)$$

Необхідною умовою збіжності процесу інтегрування є нерівність

$$\Delta t \left(\frac{a}{\Delta x} \right)^2 \leq 0,5. \quad (2.8.19)$$

Початкові та граничні умови в дискретизованому вигляді записуються як

$$u_{0j} = \varphi(j \cdot \Delta x); \quad u_{i0} = v(i \cdot \Delta t); \quad u_{im} = w(i \cdot \Delta t). \quad (2.8.20)$$

Аналітичне рішення параболічного рівняння (2.8.4) у випадку нульових граничних умов для температур кінців стрижня має вигляд

$$\begin{cases} u(t, x) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \exp \left[- \left(\frac{k \cdot \pi \cdot a}{L} \right)^2 \cdot t \right] \cdot \sin \left(\frac{k \cdot \pi \cdot x}{L} \right); \\ b_k = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) \cdot \sin \left(\frac{k \cdot \pi \cdot x}{L} \right) dx. \end{cases} \quad (2.8.21)$$

У випадку нульових граничних умов для похідних температур кінців стрижня по подовжній координаті рішення має вигляд

$$\begin{cases} u(t, x) = c_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \exp \left[- \left(\frac{k \cdot \pi \cdot a}{L} \right)^2 \cdot t \right] \cdot \cos \left(\frac{k \cdot \pi \cdot x}{L} \right); \\ c_0 = \frac{1}{L} \int_0^L \varphi(x) dx; \quad c_k = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) \cdot \cos \left(\frac{k \cdot \pi \cdot x}{L} \right) dx. \end{cases} \quad (2.8.22)$$

Різницева схема інтегрування еліптичного рівняння (2.8.5) дещо інша ніж у

розглянутих випадках гіперболічного та параболічного рівнянь.

Граничні умови у формі задачі Діріхле для випадку квадратної області з довжиною сторони L мають вигляд

$$\begin{cases} u(x, 0) = v_0(x); & u(x, L) = v_1(x); & 0 \leq x \leq L; \\ u(0, y) = w_0(y); & u(L, y) = w_1(y); & 0 \leq y \leq L. \end{cases} \quad (2.8.23)$$

Далі розглядається чисельне рішення двовимірного рівняння Лапласа на квадратній області. При цьому рівняння (2.8.5) розглядається як однорідне. Після підстановки в нього апроксимацій похідних і простих алгебраїчних перетворень, різниці рівняння набувають вигляду

$$u_{i+1j} + u_{i-1j} + u_{ij+1} + u_{ij-1} - 4u_{ij} = 0; \quad i = 1..m-1; \quad j = 1..m-1, \quad (2.8.24)$$

де m – число кроків інтегрування по горизонталі та вертикалі.

Граничні умови в дискретизованому вигляді записуються як

$$u_{0j} = v_0(j \cdot \Delta); \quad u_{mj} = v_1(j \cdot \Delta); \quad u_{i0} = w_0(i \cdot \Delta); \quad u_{im} = w_1(i \cdot \Delta); \quad \Delta = \frac{L}{m}. \quad (2.8.25)$$

Для випадку $m = 3$ система лінійних рівнянь (2.8.24) набуває вигляду

$$\begin{cases} u_{21} + u_{01} + u_{12} + u_{10} - 4u_{11} = 0 \\ u_{22} + u_{02} + u_{13} + u_{11} - 4u_{12} = 0 \\ u_{31} + u_{11} + u_{22} + u_{20} - 4u_{21} = 0 \\ u_{32} + u_{12} + u_{23} + u_{21} - 4u_{22} = 0 \end{cases}. \quad (2.8.26)$$

Групуючи відомі змінні, значення яких задаються граничними умовами, у правій частині, а невідомі – в лівій і, приводячи систему до матричного вигляду, можна отримати

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{21} \\ u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_{01} - u_{10} \\ -u_{02} - u_{13} \\ -u_{31} - u_{20} \\ -u_{32} - u_{23} \end{pmatrix}. \quad (2.8.27)$$

Характерною рисою матриць систем лінійних рівнянь, що формуються в наслідок різницевої апроксимації ДРЧП є домінування елементів головної діагоналі та їх розрідженість – рівність нулю більшої частини їх елементів, що особливо проявляється при великій кількості кроків інтегрування. Такі системи

лінійних рівнянь ефективно розв'язуються ітераційними методами, які були розглянуті вище.

Аналітичне рішення для рівняння Лапласа (2.8.5) і вищезазначених граничних умов має вигляд

$$\begin{cases} u(x, y) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{k \cdot \pi \cdot x}{L}\right)}{\operatorname{sh}(k \cdot \pi)} \left\{ a1_k \operatorname{sh}\left[\frac{k \cdot \pi \cdot (L - y)}{L}\right] + b1_k \operatorname{sh}\left[\frac{k \cdot \pi \cdot y}{L}\right] \right\} + \\ \sqrt{\frac{2}{L}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{k \cdot \pi \cdot y}{L}\right)}{\operatorname{sh}(k \cdot \pi)} \left\{ a2_k \operatorname{sh}\left[\frac{k \cdot \pi \cdot (L - x)}{L}\right] + b2_k \operatorname{sh}\left[\frac{k \cdot \pi \cdot x}{L}\right] \right\}. \end{cases} \quad (2.8.28)$$

При цьому коефіцієнти рядів, що входять в вираз (2.8.28) обчислюються як

$$\begin{cases} a1_k = \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L v_0(x) \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi \cdot x}{L}\right) dx; & b1_k = \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L v_1(x) \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi \cdot x}{L}\right) dx; \\ a2_k = \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L w_0(y) \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi \cdot y}{L}\right) dy; & a2_k = \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L w_1(y) \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi \cdot y}{L}\right) dy. \end{cases} \quad (2.8.29)$$

Постановка задачі

Дано

Графік функції, що визначає початкові, або граничні умови.

Потрібно

Розв'язати ДРЧП гіперболічного, параболічного та еліптичного типів чисельним та аналітичним методами.

Рекомендації щодо виконання роботи

1. Кусково аналітично апроксимувати функцію, що визначає початкові, або граничні умови та побудувати її графік.

2. Для заданої функції початкової умови (початкового розподілу вертикальних відхилень елементів струни) з номером №С, де №С – порядковий номер здобувача вищої освіти за журналом, чисельно розв'язати задачу коливань закріпленої на кінцях струни, використовуючи різницеву апроксимацію диференціального рівняння гіперболічного типу. Побудувати анімований графік функції-рішення $U_{i,j}$. Прийняти: тривалість процесу $T=1$, довжину струни $L=1$, коефіцієнт рівняння $a^2=1$ кількість кроків інтегрування за часом $n=100$, за просторовою координатою – $m=100$.

3. Використовуючи аналітичне рішення задачі коливань струни для умов по п. 1, побудувати графік функцій-рішення $u(t, x)$ для моментів часу

$$t = \frac{L}{100a^2}, \frac{L}{50a^2}, \frac{L}{20a^2}, \frac{L}{10a^2}, \frac{L}{a^2}. \text{ Вибрати кількість членів часткової суми}$$

ряду, що визначає рішення $k = 100$. Порівняти результати, що отримані за п. 2 та 3.

4. Для заданої функції початкової умови (початкового розподілу температури стрижня) з номером №С чисельно розв'язати задачу остигання стрижня, використовуючи різницеву апроксимацію диференціального рівняння параболічного типу. Побудувати анімований графік функції-рішення $U_{i,j}$. Прийняти: тривалість процесу $T = 1$, довжину стрижня $L = 1$, коефіцієнт рівняння $a^2 = 1$ кількість кроків інтегрування за часом $n = 2 \cdot 10^4$, за просторовою координатою – $m = 100$. Вважати, що на кінцях стрижня підтримується нульова температура.

5. Використовуючи аналітичне рішення задачі остигання стрижня для умов по п. 1, побудувати графік функцій-рішення $u(t, x)$ для моментів часу $t = \frac{L}{100a^2}, \frac{L}{50a^2}, \frac{L}{20a^2}, \frac{L}{10a^2}, \frac{L}{a^2}$. Вибрати кількість членів часткової суми ряду, що визначає рішення $k = 100$. Порівняти результати, що отримані за п. 4 та 5.

6. Для заданої функції граничних умов (розподілу електричного потенціалу вертикальних границь) з номером №С чисельно розв'язати задачу Діріхле для рівняння Лапласа на двовимірній квадратній області, використовуючи різницеву апроксимацію диференціального рівняння еліптичного типу. Побудувати графік ізоліній функції-рішення $U_{i,j}$. Вибрати: довжину сторони області $L = 1$, значення потенціалу на горизонтальних границях $U_{0,j} = U_{m,j} = 0$, число кроків інтегрування по горизонталі та вертикалі $m = 3$.

7. Використовуючи аналітичне рішення задачі Діріхле для рівняння Лапласа на двовимірній квадратній області для умов по п. 1, побудувати графік ізоліній функції-рішення $U_{i,j}$. Вибрати кількість членів часткової суми ряду, що визначає рішення $k = 100$, а кількість вузлів сітки, в яких визначається рішення для побудування графіка – $m = 100$. Порівняти результати, що отримані за п. 6 та 7.

Вимоги до звіту

Звіт роботі повинен містити:

1. Назву дисципліни та лабораторної роботи.
2. Прізвище, ім'я та по батькові здобувача вищої освіти, шифр групи, номер варіанту.
3. Об'єкт, предмет і мету лабораторної роботи.
4. Вхідні дані: графік та кусково аналітичне подання функції, що визначає початкові, або граничні умови, параметри інтегрування для кожного типу рівняння.
5. Код програми, що реалізує поставлені завдання.
6. Графіки залежностей вертикальних відхилень елементів струни (профілі струни) і температури стрижня від горизонтальної координати в різні моменти часу, а також просторовий розподіл електричного поля для чисельного та аналітичного рішень.

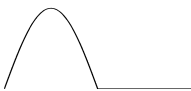
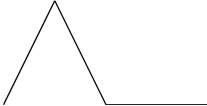
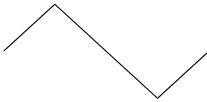
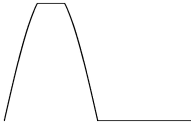
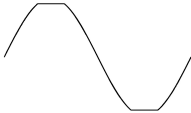
7. Висновки.

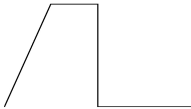
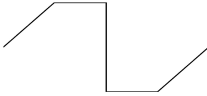
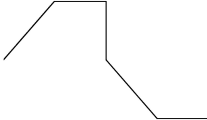
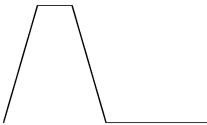
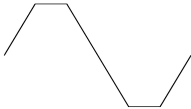
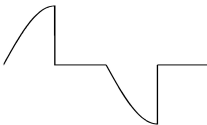
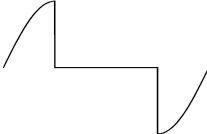
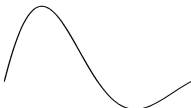
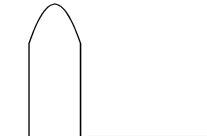
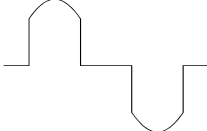
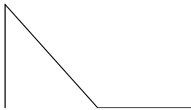
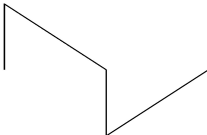
Контрольні питання і завдання

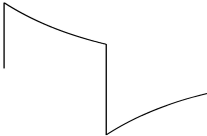
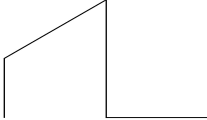
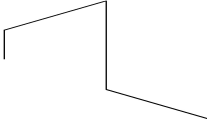
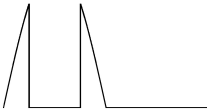
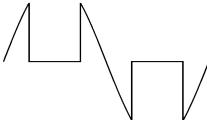
1. Дайте визначення ДРЧП n -го порядку.
2. Поясніть принцип класифікації ДРЧП другого порядку.
3. Назвіть фізичні процеси, які описуються за допомогою ДРЧП гіперболічного, параболічного та еліптичного типів.
4. Запишіть ДРЧП гіперболічного, параболічного типів для одновимірного випадку та еліптичного – для двовимірного.
5. Поясніть, що задають початкові та граничні умови для ДРЧП.
6. Запишіть різницеві апроксимації ДРЧП гіперболічного, параболічного та еліптичного типів.
7. Запишіть граничні та початкові умови у дискретизованому вигляді для ДРЧП гіперболічного, параболічного та еліптичного типів.
8. Приведіть необхідні умови збіжності чисельного рішення ДРЧП гіперболічного та параболічного типів.
9. Назвіть особливості матриць систем різницевих рівнянь, які утворюються в наслідок апроксимації ДРЧП.

Варіанти завдань

Таблиця 2.8.1. Функція, що визначає початкові, або граничні умови

№	Функція, що визначає початкові, або граничні умови
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	
16	
17	
18	
19	
20	

21	
22	
23	
24	
25	
26	

3. КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ

Навчальні досягнення здобувачів вищої освіти за результатами вивчення курсу оцінюватимуться за шкалою, що наведена нижче:

Рейтингова шкала	Інституційна шкала
90–100	відмінно
74–89	добре
60–73	задовільно
0–59	незадовільно

Здобувач вищої освіти може отримати підсумкову оцінку з навчальної дисципліни на підставі оцінювання знань та практичних навичок за умови, якщо набрана сумарна кількість балів зі складових оцінювання становитиме не менше 60 балів.

Успішність складається з оцінок за теоретичну частину курсу, лабораторні роботи та самостійної роботи здобувача вищої освіти з підготовки до лабораторних робіт. Отримані бали додаються один до одного і є підсумковою оцінкою за вивчення навчальної дисципліни. Максимально здобувач може набрати 100 балів.

Максимальне оцінювання становить:

Теоретична частина	Лабораторні роботи	Самостійна робота з підготовки до лабораторних робіт	Разом
44	48	8	100

Теоретична частина оцінюється за результатами online тесту, який містить 40 запитань.

Лабораторні роботи приймаються за звітами і контрольними запитаннями до кожної з роботи.

Критерії оцінювання теоретичної частини курсу

Для кожного запитання тесту потрібно вибрати єдину правильну відповідь. Кількість варіантів відповіді в залежності від характеру запитання може складати від 3-х до 10-ти. Кількість балів, які нараховуються за правильну відповідь у залежності від складності запитання може складати від 1-го до 4-х. У разі неправильної відповіді на запитання, здобувач отримує за нього 0 балів. Максимальна кількість балів, яку можна набрати за виконання тесту становить 69, що відповідає оцінці 44 в 100 бальній шкалі. Оцінка тесту в 100 бальній шкалі розраховується як прямо пропорційна кількості балів, яка набрана при його виконанні.

Критерії оцінювання лабораторних робіт

За кожну лабораторну роботу здобувач може отримати до 6 балів (усього 48 балів), а саме:

6 балів: програма чисельних розрахунків правильно функціонує, супроводжується достатньою кількістю коментарів, звіт з роботи оформлений згідно з методичними рекомендаціями і містить повні, інформативні та обґрунтовані висновки.

4 бали: програма чисельних розрахунків правильно функціонує, але містить незначні помилки, які суттєво не впливають на отримувані результати, або кількість коментарів недостатня, або звіт з роботи оформлений із незначними відхиленнями від методичних рекомендацій, або висновки не повністю задовольняють вимогам повноти, інформативності та обґрунтованості.

2 бали: програма чисельних розрахунків функціонує, але містить помилки, які суттєво впливають на отримувані результати, або коментарі відсутні, або звіт з роботи оформлений із суттєвими відхиленнями від методичних рекомендацій, або висновки не задовольняють вимогам повноти, інформативності та обґрунтованості.

0 балів: програма чисельних розрахунків не функціонує, або звіт з роботи відсутній, або не містить висновків, або висновки протирічать фактично отриманим результатам.

У разі отримання позитивної оцінки здобувач вищої освіти може підвищити її шляхом очної співбесіди з викладачем. При цьому з кожної лабораторної роботи здобувач вищої освіти отримує 3 запитання з переліку контрольних запитань. За кожну правильну відповідь на запропоновані запитання нараховується 1 бал.

Критерії оцінювання самостійної роботи

За підготовку вхідних даних згідно з варіантом завдання до кожної лабораторної роботи здобувач отримує:

1 бал (усього до 8 балів).

0 балів: підготовку вхідних даних не виконано, дані розраховані невірно або не відповідають варіанту завдання.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Коряшкіна Л.С. Чисельні методи: Навч. посібник. [Текст] / Л.С. Коряшкіна, М.М. Одновол – Дніпро : НГУ, 2007. – 220 с.
2. Пістунов І.М. Чисельні методи: Навч. посібник. [Електронне видання] / І.М. Пістунов – Дніпро : НГУ, 2014. – 215 с.
3. Мусіяка В.Г. Основи числових методів: Підручник [Текст] / В.Г. Мусіяка. – Дніпро : ЛПРА, 2017. – 256 с.
4. Дейнега Л.Ю. Методичні вказівки до лабораторних робіт з дисципліни «Чисельні методи» для студентів напряму підготовки 122 «Комп'ютерні науки». [Текст] / Г.М. Шило, Н. О. Миронова, Л.Ю. Дейнега. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2017. – 36 с.
5. Мірошкіна І.В. Методичні рекомендації до лабораторних робіт з дисципліни «Алгоритми та методи обчислень» для здобувачів освітнього ступеня бакалавра спеціальності 123 «Комп'ютерна інженерія». [Текст] / І.В. Мірошкіна – Черкаси: ЧДТУ, 2018. – 106 с.
6. Кожевников А.В. Похибки численного метода интегрирования функций комплексной змiнної [Текст] / А.В. Кожевников, Л.І. Мещеряков // Гірнича електромеханіка та автоматика: наук.-техн. зб. – Дніпро: НТУ ДП, 2020. – Вип.103 – С. 37 – 43.
7. Кожевников А.В. Чисельний метод визначення нулів функцій комплексної змiнної [Текст] / А.В. Кожевников, С.М. Ткаченко // Гірнича електромеханіка та автоматика: наук.-техн. зб. – Дніпро: НТУ ДП, 2020. – Вип.103 – С. 72 – 79.
8. Kozhevnykov A., Dmytriyeva O. Creating using the mathcad system of laboratory experimentation on the subject "Numerical methods in computer science" / Матеріали XVIII міжнародної конференції "Проблеми використання інформаційних технологій в освіті, науці та промисловості" – Дніпро: НТУ «Дніпровська політехніка», 2023. – С. 9–14.

Індивідуальні завдання до лабораторної роботи № 1

- 1 Визначити, яка рівність точніша.
 - 2 Обчислити вираз 2 та визначити похибки результату.
 - 3 Обчислити вираз 3 та визначити похибки результату.
 - 4 Обчислити вираз 4, користуючись правилами підрахунку вірних цифр, і, вважаючи всі значущі цифри вхідних даних вірними.
- Варіанти чисельних даних а, б, в застосовуються при наявності кількох груп на потоці.

№1 1) $\sqrt{44}=6,63$; $19/41=0,463$.

2) $X = \frac{a \cdot b}{\sqrt[4]{c}}$

	а	б	в
<i>a</i>	4,86 (±0,02)	7,26 (±0,004)	3,33 (±0,02)
<i>b</i>	3,111 (±0,002)	22,343 (±0,001)	6,215 (±0,001)
<i>c</i>	888,1 (±0,2)	66,28 (±0,02)	33,42 (±0,04)

3) $X = \left(\frac{(a+b) \cdot c}{m-n} \right)^2$

	а	б	в
<i>a</i>	5,3 (±0,04)	4,4 (±0,05)	4,14 (±0,02)
<i>b</i>	17,21 (±0,02)	15,32 (±0,01)	22,16 (±0,03)
<i>c</i>	7,2 (±0,04)	4,4 (±0,04)	7,1 (±0,03)
<i>m</i>	13,422 (±0,004)	33,773 (±0,005)	26,275 (±0,003)
<i>n</i>	4,38 (±0,004)	8,52 (±0,002)	7,12 (±0,004)

4) $S = \frac{h^2}{18} \div \frac{a^2 + 4 \cdot a \cdot b + b^2}{(a+b)^2}$

	а	б	в
<i>a</i>	2,132	5,244	6,877
<i>b</i>	3,158	3,522	2,344
<i>h</i>	2,14	5,32	5,34

№2 1) $7/15=0,467$; $\sqrt{30}=5,48$.

2) $X = \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}}{c}$

	а	б	в
<i>a</i>	3,845 (±0,004)	4,632 (±0,003)	7,312 (±0,004)
<i>b</i>	16,2 (±0,05)	23,3 (±0,04)	18,4 (±0,03)
<i>c</i>	10,8 (±0,1)	11,3 (±0,06)	20,2 (±0,08)

$$3) X = \frac{(a+m) \cdot m}{(c-d)^2}$$

	a	b	B
a	2,754 (±0,001)	3,236 (±0,002)	4,523 (±0,003)
b	11,7 (±0,04)	15,8 (±0,03)	10,8 (±0,02)
m	0,56 (±0,005)	0,64 (±0,004)	0,85 (±0,003)
c	10,536 (±0,002)	12,415 (±0,003)	9,318 (±0,002)
d	6,32 (±0,008)	7,18 (±0,006)	4,17 (±0,004)

$$4) M = \frac{(a+b) \cdot h^3}{4} + \frac{(a+b) \cdot h}{12}$$

	a	b	B
a	8,53	6,44	9,05
b	6,271	5,323	3,244
h	12,48	15,44	20,18

№3 1) $\sqrt{10,5}=3,24$; $4/17=0,235$.

$$2) X = \frac{\sqrt{a \cdot b}}{c}$$

	a	b	B
a	228,6 (±0,06)	315,6 (±0,05)	186,7 (±0,04)
b	86,4 (±0,02)	72,5 (±0,03)	66,6 (±0,02)
c	68,7 (±0,05)	53,8 (±0,04)	72,3 (±0,03)

$$3) X = \frac{m^3 \cdot (a+b)}{c-d}$$

	a	b	B
a	13,5 (±0,02)	18,5 (±0,03)	11,8 (±0,02)
b	3,7 (±0,02)	5,6 (±0,02)	7,4 (±0,03)
m	4,22 (±0,004)	3,42 (±0,003)	5,82 (±0,005)
c	34,5 (±0,02)	26,3 (±0,01)	26,7 (±0,03)
d	23,725 (±0,005)	14,782 (±0,006)	11,234 (±0,004)

$$4) N = \frac{(a+b)^2}{2 \cdot h} + \frac{(a^2+b^2) \cdot h}{5}$$

	a	b	B
a	0,562	0,834	0,445
b	0,2518	0,3523	0,4834
h	0,68	0,74	0,87

№4 1) $15/7=2,14$; $\sqrt{10}=3,16$.

$$2) X = \frac{a \cdot b^3}{c}$$

	a	b	B
<i>a</i>	0,643 (±0,0005)	0,142 (±0,0003)	0,258 (±0,0002)
<i>b</i>	2,17 (±0,002)	1,71 (±0,002)	3,45 (±0,001)
<i>c</i>	5,843 (±0,001)	3,727 (±0,001)	7,221 (±0,003)

$$3) X = \frac{(a-b) \cdot c}{\sqrt{m+n}}$$

	a	b	B
<i>a</i>	27,16 (±0,006)	15,71 (±0,005)	12,31 (±0,004)
<i>b</i>	5,03 (±0,01)	3,28 (±0,02)	1,73 (±0,03)
<i>c</i>	3,6 (±0,02)	7,2 (±0,01)	3,7 (±0,02)
<i>m</i>	12,375 (±0,004)	13,752 (±0,001)	17,428 (±0,003)
<i>n</i>	86,2 (±0,05)	33,7 (±0,03)	41,7 (±0,01)

$$4) V = \frac{h}{6} \cdot S \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{a}{A} + \frac{A}{a}} \right)$$

	a	b	B
<i>a</i>	3,21	6,21	6,53
<i>A</i>	13,33	34,12	12,34
<i>S</i>	34,8	61,2	27,9
<i>h</i>	4,55	3,13	6,67

№5 1) $6/7=0,857$; $\sqrt{4,8}=2,19$.

$$2) X = \frac{a^2 \cdot b}{c}$$

	a	b	B
<i>a</i>	3,456 (±0,002)	1,245 (±0,001)	0,327 (±0,005)
<i>b</i>	0,642 (±0,0005)	0,121 (±0,0002)	3,147 (±0,0001)
<i>c</i>	7,12 (±0,004)	2,34 (±0,003)	1,78 (±0,001)

$$3) X = \frac{(a+b) \cdot m}{\sqrt{c-d}}$$

	a	b	B
<i>a</i>	23,16 (±0,02)	17,41 (±0,01)	32,37 (±0,03)
<i>b</i>	8,23 (±0,005)	1,27 (±0,002)	2,35 (±0,001)
<i>c</i>	145,5 (±0,08)	342,3 (±0,04)	128,7 (±0,02)
<i>d</i>	28,6 (±0,1)	11,7 (±0,1)	27,3 (±0,04)
<i>m</i>	0,28 (±0,006)	0,71 (±0,003)	0,93 (±0,001)

$$4) S = \frac{h^2}{18} \cdot \frac{a^2 + 4 \cdot a \cdot b + b^2}{(a+b)^2}$$

	a	b	B
<i>h</i>	21,1	17,8	32,5
<i>a</i>	22,08	32,47	27,51
<i>b</i>	31,11	11,42	21,78

№6 1) $12/11=1,091$; $\sqrt{6,8}=2,61$.

$$2) V = \frac{\pi^2}{4} \cdot D \cdot d^2$$

	a	б	в
π	3,14	3,14	3,14
D	54 ($\pm 0,5$)	72 ($\pm 0,3$)	31 ($\pm 0,01$)
d	8,235 ($\pm 0,001$)	3,274 ($\pm 0,002$)	7,345 ($\pm 0,001$)

$$3) S = \frac{1}{64} \cdot \pi \cdot \sqrt{D^4 - d^4}$$

	a	б	в
D	36,5 ($\pm 0,1$)	41,4 ($\pm 0,2$)	52,6 ($\pm 0,01$)
d	26,35 ($\pm 0,005$)	31,75 ($\pm 0,003$)	48,39 ($\pm 0,001$)
π	3,14	3,14	3,14

$$4) V = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot (2 \cdot a + \sqrt{a} + h)$$

	a	б	в
a	3,111	6,632	4,325
h	2,55	4,22	3,18
π	3,14	3,14	3,14

№7 1) $2/21=0,095$; $\sqrt{22}=4,69$.

$$2) X = \frac{a \cdot b}{c^2}$$

	a	б	в
a	0,3575 ($\pm 0,0002$)	0,1756 ($\pm 0,0001$)	0,2731 ($\pm 0,0003$)
b	2,63 ($\pm 0,01$)	3,71 ($\pm 0,03$)	5,12 ($\pm 0,02$)
c	0,854 ($\pm 0,0005$)	0,285 ($\pm 0,0002$)	0,374 ($\pm 0,0001$)

$$3) X = \frac{a + b}{\sqrt{(c - d) \cdot m}}$$

	a	б	в
a	16,342 ($\pm 0,001$)	12,751 ($\pm 0,001$)	31,456 ($\pm 0,002$)
b	2,5 ($\pm 0,03$)	3,7 ($\pm 0,02$)	7,3 ($\pm 0,01$)
c	38,17 ($\pm 0,002$)	23,76 ($\pm 0,003$)	33,28 ($\pm 0,003$)
d	9,14 ($\pm 0,005$)	8,12 ($\pm 0,004$)	6,71 ($\pm 0,001$)
m	3,6 ($\pm 0,04$)	1,7 ($\pm 0,01$)	5,8 ($\pm 0,02$)

$$4) a = c^2 \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot \beta}{c} + \frac{\gamma^2}{c^2} \right)$$

	a	б	в
c	2,435	7,834	4,539
β	0,15	0,21	0,34
γ	1,27	3,71	5,93

№8 1) $23/15 = 1,53$; $\sqrt{9,8} = 3,13$.

$$2) X = \sqrt{\frac{\sqrt{c \cdot b}}{d}}$$

	a	б	в
c	0,7568 ($\pm 0,0002$)	0,8345 ($\pm 0,0004$)	0,6384 ($\pm 0,0002$)
d	21,7 ($\pm 0,02$)	13,8 ($\pm 0,03$)	32,7 ($\pm 0,04$)
b	2,65 ($\pm 0,01$)	1,84 ($\pm 0,006$)	4,88 ($\pm 0,03$)

$$3) y = \frac{\sqrt{a-b}}{m \cdot (n+a)}$$

	a	б	в
a	34,82 ($\pm 0,04$)	10,11 ($\pm 0,005$)	22,32 ($\pm 0,02$)
b	2,7324 ($\pm 0,0005$)	3,122 ($\pm 0,0004$)	4,455 ($\pm 0,005$)
m	0,78 ($\pm 0,005$)	0,46 ($\pm 0,001$)	0,38 ($\pm 0,004$)
n	25,7 ($\pm 0,02$)	67,2 ($\pm 0,03$)	86,7 ($\pm 0,09$)

$$4) V = \frac{1}{15} \cdot \pi \cdot h \cdot (2 \cdot D^2 + D \cdot \sqrt{d} + 0,25 \cdot d^2)$$

	a	б	в
h	84	76	45
D	8,32	7,21	6,56
d	4,08	8,34	12,24
π	3,14	3,14	3,14

№9 1) $6/11 = 0,545$; $\sqrt{83} = 9,11$.

$$2) Y = \frac{m^2 \cdot n}{c^3}$$

	a	б	в
m	1,6531 ($\pm 0,0003$)	2,348 ($\pm 0,002$)	3,804 ($\pm 0,003$)
n	3,78 ($\pm 0,002$)	4,37 ($\pm 0,004$)	4,05 ($\pm 0,003$)
c	0,158 ($\pm 0,0005$)	0,235 ($\pm 0,0003$)	0,318 ($\pm 0,0002$)

$$3) X = \frac{\sqrt{a-b} \cdot m}{c+d}$$

	a	б	в
a	9,542 ($\pm 0,001$)	8,357 ($\pm 0,003$)	4,218 ($\pm 0,001$)
b	3,128 ($\pm 0,002$)	2,48 ($\pm 0,004$)	1,57 ($\pm 0,006$)
m	2,8 ($\pm 0,03$)	3,17 ($\pm 0,01$)	2,32 ($\pm 0,02$)
c	0,172 ($\pm 0,001$)	1,315 ($\pm 0,0004$)	2,418 ($\pm 0,004$)
d	5,4 ($\pm 0,02$)	2,4 ($\pm 0,02$)	1,8 ($\pm 0,01$)

$$4) S = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}, \text{ де } p = \frac{a+b+c}{2}$$

	a	б	в
--	---	---	---

a	46,3	10,5	2,48
b	29,72	34,18	5,344
c	37,654	27,327	6,0218

№10 1) $17/19=0,895$; $\sqrt{52}=7,21$.

$$2) X = \frac{a \cdot b}{\sqrt[3]{c}}$$

	a	b	B
a	3,85 ($\pm 0,01$)	4,16 ($\pm 0,005$)	7,27 ($\pm 0,01$)
b	2,0435 ($\pm 0,0004$)	12,163 ($\pm 0,002$)	5,205 ($\pm 0,002$)
c	962,6 ($\pm 0,1$)	55,18 ($\pm 0,01$)	87,32 ($\pm 0,03$)

$$3) X = \left(\frac{(a+b) \cdot c}{m-n} \right)^2$$

	a	b	B
a	4,3 ($\pm 0,05$)	5,2 ($\pm 0,04$)	2,13 ($\pm 0,01$)
b	17,21 ($\pm 0,02$)	15,32 ($\pm 0,01$)	22,16 ($\pm 0,03$)
c	8,2 ($\pm 0,05$)	7,5 ($\pm 0,05$)	6,3 ($\pm 0,04$)
m	12,417 ($\pm 0,003$)	21,823 ($\pm 0,002$)	16,825 ($\pm 0,004$)
n	8,37 ($\pm 0,005$)	7,56 ($\pm 0,003$)	8,13 ($\pm 0,002$)

$$4) \gamma = \frac{\alpha \cdot b - \beta \cdot a}{b^2} - \frac{\beta \cdot (a \cdot b - \beta \cdot a)}{b^2 \cdot (b + \beta)}$$

	a	b	B
α	5,27	7,31	3,28
β	0,0562	0,0761	0,0545
a	158,35	234,36	341,17
b	61,21	81,26	52,34

№11 1) $21/29=0,724$; $\sqrt{44}=6,63$.

$$2) f = \frac{Q \cdot e^3}{48 \cdot E}$$

	a	b	B
Q	54,8 ($\pm 0,02$)	38,5 ($\pm 0,01$)	17,3 ($\pm 0,03$)
e	2,45 ($\pm 0,01$)	3,35 ($\pm 0,02$)	5,73 ($\pm 0,01$)
E	0,863 ($\pm 0,004$)	0,734 ($\pm 0,001$)	0,956 ($\pm 0,004$)

$$3) Q = \frac{(3 \cdot n - 1)^3 \cdot (x - y)}{x + y}$$

	a	b	B
n	2,0435 ($\pm 0,0001$)	1,1753 ($\pm 0,0002$)	4,5681 ($\pm 0,0001$)
x	4,2 ($\pm 0,05$)	5,8 ($\pm 0,01$)	6,3 ($\pm 0,02$)
y	0,82 ($\pm 0,01$)	0,65 ($\pm 0,02$)	0,42 ($\pm 0,03$)

$$4) S = \frac{h}{9} \div \left(\frac{a^2 + 3 \cdot a \cdot b + b^2}{a^2 + b^2} \right)$$

	a	b	B
<i>a</i>	2,241	3,333	4,222
<i>b</i>	4,257	2,528	3,218
<i>h</i>	2,34	5,11	3,59

№12 1) $50/19=2,63$; $\sqrt{27}=5,196$.

$$2) X = \frac{\sqrt{a \cdot b}}{c}$$

	a	b	B
<i>a</i>	3,845 ($\pm 0,004$)	4,632 ($\pm 0,003$)	7,312 ($\pm 0,004$)
<i>b</i>	16,2 ($\pm 0,05$)	23,3 ($\pm 0,04$)	18,4 ($\pm 0,03$)
<i>c</i>	10,8 ($\pm 0,1$)	11,3 ($\pm 0,06$)	20,2 ($\pm 0,08$)

$$3) X = \frac{(a+b) \cdot m}{(c-d)^2}$$

	a	b	B
<i>a</i>	2,754 ($\pm 0,001$)	3,236 ($\pm 0,002$)	4,523 ($\pm 0,003$)
<i>b</i>	11,7 ($\pm 0,04$)	15,8 ($\pm 0,03$)	10,8 ($\pm 0,02$)
<i>m</i>	0,56 ($\pm 0,005$)	0,64 ($\pm 0,004$)	0,85 ($\pm 0,003$)
<i>c</i>	10,536 ($\pm 0,002$)	12,415 ($\pm 0,003$)	9,318 ($\pm 0,002$)
<i>d</i>	6,32 ($\pm 0,008$)	7,18 ($\pm 0,006$)	4,17 ($\pm 0,004$)

$$4) M = \frac{(a+b) \cdot h^3}{4} + \frac{(a+b) \cdot h}{12}$$

	a	b	B
<i>a</i>	8,53	6,44	9,05
<i>b</i>	6,271	5,323	3,244
<i>h</i>	12,48	15,44	20,18

№13 1) $13/17=0,765$; $\sqrt{31}=5,57$.

$$2) X = \frac{\sqrt{a \cdot b}}{c^2}$$

	a	b	B
<i>a</i>	228,6 ($\pm 0,06$)	315,6 ($\pm 0,05$)	186,7 ($\pm 0,04$)
<i>b</i>	86,4 ($\pm 0,02$)	72,5 ($\pm 0,03$)	66,6 ($\pm 0,02$)
<i>c</i>	6,7 ($\pm 0,02$)	5,8 ($\pm 0,01$)	7,3 ($\pm 0,03$)

$$3) X = \frac{m^3 \cdot (a+b)}{c-d}$$

	a	b	B
<i>a</i>	13,5 ($\pm 0,02$)	18,5 ($\pm 0,03$)	11,8 ($\pm 0,02$)
<i>b</i>	3,7 ($\pm 0,02$)	5,6 ($\pm 0,02$)	7,4 ($\pm 0,03$)

m	4,22 ($\pm 0,004$)	3,42 ($\pm 0,003$)	5,82 ($\pm 0,005$)
c	34,5 ($\pm 0,02$)	26,3 ($\pm 0,01$)	26,7 ($\pm 0,03$)
d	23,725 ($\pm 0,005$)	14,782 ($\pm 0,006$)	11,234 ($\pm 0,004$)

$$4) N = \frac{(a+b)^2}{2 \cdot h} + \frac{(a^2 + b^2) \cdot h}{5}$$

	a	$\bar{b}$	B
a	0,562	0,834	0,445
b	0,2518	0,3523	0,4834
h	0,68	0,74	0,87

№14 1) $7/22=0,318$; $\sqrt{13}=3,61$.

$$2) X = \frac{a^2 \cdot b}{c}$$

	a	$\bar{b}$	B
a	3,456 ($\pm 0,002$)	1,245 ($\pm 0,001$)	0,327 ($\pm 0,005$)
b	0,642 ($\pm 0,0005$)	0,121 ($\pm 0,0002$)	3,147 ($\pm 0,0001$)
c	7,12 ($\pm 0,004$)	2,34 ($\pm 0,003$)	1,78 ($\pm 0,001$)

$$3) X = \frac{(a+b) \cdot m}{\sqrt{(c-d)}}$$

	a	$\bar{b}$	B
a	23,16 ($\pm 0,02$)	17,41 ($\pm 0,01$)	32,37 ($\pm 0,03$)
b	8,23 ($\pm 0,005$)	1,27 ($\pm 0,002$)	2,35 ($\pm 0,001$)
c	145,5 ($\pm 0,08$)	342,3 ($\pm 0,04$)	128,7 ($\pm 0,02$)
d	28,6 ($\pm 0,1$)	11,7 ($\pm 0,1$)	27,3 ($\pm 0,04$)
m	0,28 ($\pm 0,006$)	0,71 ($\pm 0,003$)	0,93 ($\pm 0,001$)

$$4) V = \frac{h}{3} \cdot S \cdot \left(1 + \frac{a}{A} + \frac{a^2}{A^2} \right)$$

	a	$\bar{b}$	B
a	8,51	5,71	7,28
A	23,42	32,17	11,71
S	45,8	51,7	21,8
h	3,81	2,42	5,31

№15 1) $17/11=1,545$; $\sqrt{18}=4,243$.

$$2) X = \frac{a \cdot b^3}{c}$$

	a	$\bar{b}$	B
a	0,643 ($\pm 0,0005$)	0,142 ($\pm 0,0003$)	0,258 ($\pm 0,0002$)
b	2,17 ($\pm 0,002$)	1,71 ($\pm 0,002$)	3,45 ($\pm 0,001$)
c	5,843 ($\pm 0,001$)	3,727 ($\pm 0,001$)	7,221 ($\pm 0,003$)

$$3) X = \frac{(a-b) \cdot c}{\sqrt{m+n}}$$

	a	б	В
<i>a</i>	27,16 (±0,006)	15,71 (±0,005)	12,31 (±0,004)
<i>b</i>	5,03 (±0,01)	3,28 (±0,02)	1,73 (±0,03)
<i>c</i>	3,6 (±0,02)	7,2 (±0,01)	3,7 (±0,02)
<i>m</i>	12,375 (±0,004)	13,752 (±0,001)	17,428 (±0,003)
<i>n</i>	86,2 (±0,05)	33,7 (±0,03)	41,7 (±0,01)

$$4) S = \frac{h^2}{18} \cdot \frac{a^2 + 4 \cdot a \cdot b + b^2}{(a+b)^2}$$

	a	б	В
<i>h</i>	21,1	17,8	32,5
<i>a</i>	22,08	32,47	27,51
<i>b</i>	31,11	11,42	21,78

№16 1) $5/3=1,667$; $\sqrt{38}=6,16$.

$$2) X = \frac{a \cdot b}{c^2}$$

	a	б	В
<i>a</i>	0,3575 (±0,0002)	0,1756 (±0,0001)	0,2731 (±0,0003)
<i>b</i>	2,63 (±0,01)	3,71 (±0,03)	5,12 (±0,02)
<i>c</i>	0,854 (±0,0005)	0,285 (±0,0002)	0,374 (±0,0001)

$$3) X = \frac{(a+b)}{\sqrt{(c-d) \cdot m}}$$

	a	б	В
<i>a</i>	16,342 (±0,001)	12,751 (±0,001)	31,456 (±0,002)
<i>b</i>	2,5 (±0,03)	3,7 (±0,02)	7,3 (±0,01)
<i>c</i>	38,17 (±0,002)	23,76 (±0,003)	33,28 (±0,003)
<i>d</i>	9,14 (±0,005)	8,12 (±0,004)	6,71 (±0,001)
<i>m</i>	3,6 (±0,04)	1,7 (±0,01)	5,8 (±0,02)

$$4) V = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot h \cdot (3 \cdot a^2 + h^2)$$

	a	б	В
<i>a</i>	2,456	7,751	5,441
<i>h</i>	1,76	3,35	6,17
π	3,14	3,14	3,14

№17 1) $49/13=3,77$; $\sqrt{14}=3,74$.

$$2) V = \frac{\pi^2}{4} \cdot D \cdot d^2$$

	a	б	В
<i>D</i>	54 (±0,5)	72 (±0,3)	31 (±0,01)
<i>d</i>	8,235 (±0,001)	3,274 (±0,002)	7,345 (±0,001)

$$3) S = \frac{\pi}{64} \cdot \sqrt{D^3 - d^3}$$

	a	б	в
D	36,5 ($\pm 0,1$)	41,4 ($\pm 0,2$)	52,6 ($\pm 0,01$)
d	26,35 ($\pm 0,005$)	31,75 ($\pm 0,003$)	48,39 ($\pm 0,001$)
π	3,14	3,14	3,14

$$4) a = \sqrt{c} \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot \sqrt{\beta}}{c} + \frac{\gamma}{c^2} \right)$$

	a	б	в
c	2,435	3,456	1,867
β	0,15	0,21	0,34
γ	1,27	3,71	5,93

№18 1) $13/7=1,857$; $\sqrt{7}=2,65$.

$$2) Y = \frac{m^2 \cdot n}{c^3}$$

	a	б	в
m	1,6531 ($\pm 0,0003$)	2,348 ($\pm 0,002$)	3,804 ($\pm 0,003$)
n	3,78 ($\pm 0,002$)	4,37 ($\pm 0,004$)	4,05 ($\pm 0,003$)
c	0,158 ($\pm 0,0005$)	0,235 ($\pm 0,0003$)	0,318 ($\pm 0,0002$)

$$3) X = \frac{\sqrt{a-b} \cdot m}{c+d}$$

	a	б	в
a	9,542 ($\pm 0,001$)	8,357 ($\pm 0,003$)	4,218 ($\pm 0,001$)
b	3,128 ($\pm 0,002$)	2,48 ($\pm 0,004$)	1,57 ($\pm 0,006$)
m	2,82 ($\pm 0,03$)	3,17 ($\pm 0,01$)	2,32 ($\pm 0,02$)
c	0,172 ($\pm 0,001$)	1,315 ($\pm 0,0004$)	2,418 ($\pm 0,004$)
d	5,4 ($\pm 0,02$)	2,4 ($\pm 0,02$)	1,8 ($\pm 0,01$)

$$4) V = \frac{1}{25} \cdot \sqrt{h} \cdot (3 \cdot D^2 + D \cdot d + 0,75 \cdot d^2)$$

	a	б	в
h	77	54	61
D	28,3	17,2	48,3
d	42,08	9,344	32,14

№19 1) $19/12=1,58$; $\sqrt{12}=3,46$.

$$2) X = \frac{\sqrt{b \cdot c}}{d}$$

	a	б	в
c	0,4568 ($\pm 0,0001$)	0,9995 ($\pm 0,0002$)	0,2484 ($\pm 0,0001$)
d	33,7 ($\pm 0,03$)	22,8 ($\pm 0,04$)	44,7 ($\pm 0,05$)
b	3,45 ($\pm 0,02$)	2,84 ($\pm 0,005$)	7,33 ($\pm 0,04$)

$$3) y = \frac{\sqrt[3]{a-b}}{m \cdot (n-a)}$$

	a	б	в
a	10,82 ($\pm 0,03$)	9,37 ($\pm 0,004$)	11,45 ($\pm 0,01$)
b	2,786 ($\pm 0,0006$)	3,108 ($\pm 0,0003$)	4,431 ($\pm 0,002$)
m	0,28 ($\pm 0,006$)	0,46 ($\pm 0,002$)	0,75 ($\pm 0,003$)
n	14,7 ($\pm 0,06$)	15,2 ($\pm 0,04$)	16,7 ($\pm 0,05$)

$$4) S = \sqrt{(p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}, \text{ де } p = \frac{a^2 + b^2 + c}{3}$$

	a	б	в
a	26,2	11,5	3,3
b	27,76	55,99	1,22
c	32,545	89,845	7,893

№20 1) $51/11=4,64$; $\sqrt{35}=5,92$.

$$2) f = \frac{Q \cdot e^2}{32 \cdot E}$$

	a	б	в
Q	54,8($\pm 0,02$)	38,5 ($\pm 0,01$)	17,3 ($\pm 0,03$)
e	2,45 ($\pm 0,01$)	3,35 ($\pm 0,02$)	5,73 ($\pm 0,01$)
E	0,863 ($\pm 0,004$)	0,734 ($\pm 0,001$)	0,956 ($\pm 0,004$)

$$3) Q = \frac{(2 \cdot n - 1)^2 \cdot (x + y)}{x - y}$$

	a	б	в
n	2,0435 ($\pm 0,0001$)	1,1753 ($\pm 0,0002$)	4,5681 ($\pm 0,0001$)
x	4,2 ($\pm 0,05$)	5,8 ($\pm 0,01$)	6,3 ($\pm 0,02$)
y	0,82 ($\pm 0,01$)	0,65 ($\pm 0,02$)	0,42 ($\pm 0,03$)

$$4) \gamma = \frac{\alpha \cdot b - \beta \cdot a}{b^3} - \frac{\beta \cdot (a \cdot b + \beta \cdot a)}{b \cdot (b - \beta)}$$

	a	б	в
α	5,27	7,31	3,28
β	0,0562	0,0761	0,0545
a	158,35	234,36	341,17
b	61,21	81,26	52,34

№21 1) $18/7=2,57$; $\sqrt{22}=4,69$.

$$2) X = \frac{a \cdot b}{\sqrt[3]{c}}$$

	a	б	в
a	3,85 ($\pm 0,01$)	4,16 ($\pm 0,005$)	7,27 ($\pm 0,01$)
b	2,0435 ($\pm 0,0004$)	12,163 ($\pm 0,002$)	5,205 ($\pm 0,002$)

c	962,6 ($\pm 0,1$)	55,18 ($\pm 0,01$)	87,32 ($\pm 0,03$)
-----	---------------------	----------------------	----------------------

$$3) X = \left(\frac{(a+b) \cdot c}{m-n} \right)^2$$

	a	$\bar{b}$	B
a	4,3 ($\pm 0,05$)	5,2 ($\pm 0,04$)	2,13 ($\pm 0,01$)
b	17,21 ($\pm 0,02$)	15,32 ($\pm 0,01$)	22,16 ($\pm 0,03$)
c	8,2 ($\pm 0,05$)	7,5 ($\pm 0,05$)	6,3 ($\pm 0,04$)
m	12,417 ($\pm 0,003$)	21,823 ($\pm 0,002$)	16,825 ($\pm 0,004$)
n	8,37 ($\pm 0,005$)	7,56 ($\pm 0,003$)	8,13 ($\pm 0,002$)

$$4) S = \frac{h^2}{18} \div \frac{a^2 + 4 \cdot a \cdot b + b^2}{(a+b)^2}$$

	a	$\bar{b}$	B
a	1,141	2,234	5,813
b	3,156	4,518	1,315
h	1,14	4,48	2,56

№22 1) $17/9=1,89$; $\sqrt{17}=4,12$.

$$2) X = \frac{\sqrt{a \cdot b}}{c}$$

	a	$\bar{b}$	B
a	228,6 ($\pm 0,06$)	315,6 ($\pm 0,05$)	186,7 ($\pm 0,04$)
b	86,4 ($\pm 0,02$)	72,5 ($\pm 0,03$)	66,6 ($\pm 0,02$)
c	68,7 ($\pm 0,05$)	53,8 ($\pm 0,04$)	72,3 ($\pm 0,03$)

$$3) X = \frac{m^3 \cdot (a+b)}{c-d}$$

	a	$\bar{b}$	B
a	13,5 ($\pm 0,02$)	18,5 ($\pm 0,03$)	11,8 ($\pm 0,02$)
b	3,7 ($\pm 0,02$)	5,6 ($\pm 0,02$)	7,4 ($\pm 0,03$)
m	4,22 ($\pm 0,004$)	3,42 ($\pm 0,003$)	5,82 ($\pm 0,005$)
c	34,5 ($\pm 0,02$)	26,3 ($\pm 0,01$)	26,7 ($\pm 0,03$)
d	23,725 ($\pm 0,005$)	14,782 ($\pm 0,006$)	11,234 ($\pm 0,004$)

$$4) M = \frac{(a+b) \cdot h^3}{4} + \frac{(a+b) \cdot h}{12}$$

	a	$\bar{b}$	B
a	8,53	6,44	9,05
b	6,271	5,323	3,244
h	12,48	15,44	20,18

№23 1) $16/7=2,29$; $\sqrt{11}=3,32$.

$$2) X = \frac{\sqrt{a \cdot b}}{c}$$

	a	$\bar{b}$	B
a	3,845 ($\pm 0,004$)	4,632 ($\pm 0,003$)	7,312 ($\pm 0,004$)

b	16,2 ($\pm 0,05$)	23,3 ($\pm 0,04$)	18,4 ($\pm 0,03$)
c	10,8 ($\pm 0,1$)	11,3 ($\pm 0,06$)	20,2 ($\pm 0,08$)

$$3) X = \frac{(a+b) \cdot m}{(c-d)^2}$$

	a	$\bar{b}$	B
a	2,754 ($\pm 0,001$)	3,236 ($\pm 0,002$)	4,523 ($\pm 0,003$)
b	11,7 ($\pm 0,04$)	15,8 ($\pm 0,03$)	10,8 ($\pm 0,02$)
m	0,56 ($\pm 0,005$)	0,64 ($\pm 0,004$)	0,85 ($\pm 0,003$)
c	10,536 ($\pm 0,002$)	12,415 ($\pm 0,003$)	9,318 ($\pm 0,002$)
d	6,32 ($\pm 0,008$)	7,18 ($\pm 0,006$)	4,17 ($\pm 0,004$)

$$4) N = \frac{(a+b)^2}{2 \cdot h} + \frac{(a^2 + b^2) \cdot h}{5}$$

	a	$\bar{b}$	B
a	0,562	0,834	0,445
b	0,2518	0,3523	0,4834
h	0,68	0,74	0,87

№24 1) $21/13=1,62$; $\sqrt{63}=7,94$.

$$2) X = \frac{a^2 \cdot b}{c}$$

	a	$\bar{b}$	B
a	3,456 ($\pm 0,002$)	1,245 ($\pm 0,001$)	0,327 ($\pm 0,005$)
b	0,642 ($\pm 0,0005$)	0,121 ($\pm 0,0002$)	3,147 ($\pm 0,0001$)
c	7,12 ($\pm 0,004$)	2,34 ($\pm 0,003$)	1,78 ($\pm 0,001$)

$$3) X = \frac{(a+b) \cdot m}{\sqrt{(c-d)}}$$

	a	$\bar{b}$	B
a	23,16 ($\pm 0,02$)	17,41 ($\pm 0,01$)	32,37 ($\pm 0,03$)
b	8,23 ($\pm 0,005$)	1,27 ($\pm 0,002$)	2,35 ($\pm 0,001$)
c	145,5 ($\pm 0,08$)	342,3 ($\pm 0,04$)	128,7 ($\pm 0,02$)
d	28,6 ($\pm 0,1$)	11,7 ($\pm 0,1$)	27,3 ($\pm 0,04$)
m	0,28 ($\pm 0,006$)	0,71 ($\pm 0,003$)	0,93 ($\pm 0,001$)

$$4) X = \frac{h}{4} \cdot S \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{a}{A} + \frac{a^2}{A} \right)$$

	a	$\bar{b}$	B
a	7,52	4,41	5,18
A	13,32	22,27	12,22
S	24,1	31,8	32,5
h	2,82	6,41	4,21

№25 1) $12/7=1,71$; $\sqrt{47}=6,86$.

$$2) X = \frac{a \cdot b^3}{c}$$

	a	б	B
<i>a</i>	0,643 (±0,0005)	0,142 (±0,0003)	0,258 (±0,0002)
<i>b</i>	2,17 (±0,002)	1,71 (±0,002)	3,45 (±0,001)
<i>c</i>	5,843 (±0,001)	3,727 (±0,001)	7,221 (±0,003)

$$3) X = \frac{(a-b) \cdot c}{\sqrt{m+n}}$$

	a	б	B
<i>a</i>	27,16 (±0,006)	15,71 (±0,005)	12,31 (±0,004)
<i>b</i>	5,03 (±0,01)	3,28 (±0,02)	1,73 (±0,03)
<i>c</i>	3,6 (±0,02)	7,2 (±0,01)	3,7 (±0,02)
<i>m</i>	12,375 (±0,004)	13,752 (±0,001)	17,428 (±0,003)
<i>n</i>	86,2 (±0,05)	33,7 (±0,03)	41,7 (±0,01)

$$4) S = \frac{h^2}{18} \cdot \frac{a^2 + 4 \cdot a \cdot b + b^2}{(a+b)^2}$$

	a	б	B
<i>h</i>	21,1	17,8	32,5
<i>a</i>	22,08	32,47	27,51
<i>b</i>	31,11	11,42	21,78

№26 1) $6/7=0,857$; $\sqrt{41}=6,40$.

$$2) f = \frac{\sqrt{Q} \cdot e}{16 \cdot E^2}$$

	a	б	B
<i>Q</i>	64,7(±0,1)	28,7 (±0,02)	27,4 (±0,03)
<i>e</i>	3,25 (±0,02)	4,46 (±0,01)	6,73 (±0,02)
<i>E</i>	0,843 (±0,003)	0,832 (±0,002)	0,666 (±0,005)

$$3) Q = \frac{(2 \cdot n - 1) \cdot (x + y)^2}{\sqrt{x - y}}$$

	a	б	B
<i>n</i>	3,0335 (±0,0001)	1,2853 (±0,0001)	6,2341 (±0,0002)
<i>x</i>	3,7 (±0,05)	6,6 (±0,02)	9,2 (±0,01)
<i>y</i>	0,45 (±0,02)	0,44 (±0,01)	0,77 (±0,04)

$$4) \gamma = \frac{\alpha \cdot b + \beta \cdot a}{\sqrt{b}} - \frac{a \cdot (\alpha \cdot b - \beta \cdot a)}{\sqrt{\beta \cdot (b + \beta)}}$$

	a	б	B
<i>α</i>	6,37	5,42	2,11
<i>β</i>	0,0777	0,0834	0,0735
<i>a</i>	376,35	111,55	227,44
<i>b</i>	41,55	87,23	99,31

Приклад виконання лабораторної роботи № 1

1) Визначити, яка із рівностей точніша:

$$9/11=0,818; \sqrt{18}=4,24.$$

Значення заданих виразів з більшим числом десяткових знаків:

$$\alpha_1=9/11=0,81818..., \alpha_2=\sqrt{18}=4,2426....$$

Абсолютні погрішності, округлені з надлишком:

$$\Delta\alpha_1=|0,81818-0,818|\leq 0,00019,$$

$$\Delta\alpha_2=|4,2426-4,24|\leq 0,0027.$$

Відносні похибки:

$$\delta\alpha_1=\alpha\alpha_1/\alpha_1=0,00019/0,818\leq 0,00024=0,024\%;$$

$$\delta\alpha_2=\alpha\alpha_2/\alpha_2=0,0027/4,24\leq 0,00064=0,064\%.$$

Відповідь: оскільки $\delta\alpha_1<\delta\alpha_2$, то рівність $9/11=0,818$ являється більш точною.

2) Обчислити вираз та визначити похибки результату.

$$X = \frac{m^2 \cdot n^3}{\sqrt{k}},$$

де $m=28,3 (\pm 0,02)$, $n=7,45 (\pm 0,01)$, $k=0,678 (\pm 0,003)$.

Чисельні значення складових частин виразу:

$$m^2=800,9; n^3=413,5; \sqrt{k}=0,823;$$

Власне значення виразу:

$$X = \frac{800,9 \cdot 413,5}{0,823} = 402200 = 4,02 \cdot 10^5.$$

Чисельні значення відносних похибок складових частин виразу:

$$\delta_m=0,02/28,3=0,000701; \delta_n=0,01/7,45=0,00134; \delta_k=0,003/0,678=0,00442.$$

Відносна похибка виразу:

$$\Delta_X=2 \delta_m+3 \delta_n+0,5 \delta_k=0,00141+0,00403+0,00221=0,00765=0,8\%;$$

Абсолютна похибка виразу:

$$\Delta_X= 4,02 \cdot 10^5 \cdot 0,008 = 3,2 \cdot 10^3 \approx 3 \cdot 10^3.$$

Відповідь: $X = 4,0 \cdot 10^5 (\pm 3 \cdot 10^3); \delta_x=0,8\%$.

3) Обчислити вираз та визначити похибки результату.

$$N = \frac{(n-1) \cdot (m+n)}{(m-n)^2},$$

де $n=3,0567 (\pm 0,0001)$, $m=5,72 (\pm 0,02)$.

Чисельні значення абсолютних похибок складових частин виразу:

$$n-1=2,0567 (\pm 0,0001);$$

$$m+n=3,057 (\pm 0,0004)+5,72 (\pm 0,02)=8,777 (\pm 0,0204);$$

$$m-n=5,72 (\pm 0,02)-3,057 (\pm 0,0004)=2,663 (\pm 0,0204).$$

Власне значення виразу:

$$N = \frac{2,0567 \cdot 8,777}{2,663^2} = \frac{2,0567 \cdot 8,777}{7,092} = 2,545 \approx 2,55$$

Чисельні значення відносних похибок складових частин виразу та сумарна відносна похибка:

$$\delta_N = \delta_{n-1} + \delta_{m+n} + 2 \cdot \delta_{m-n} = \frac{0,0001}{2,0567} + \frac{0,0204}{8,777} + 2 \cdot \frac{0,0204}{2,663}$$

$$= 0,000049 + 0,00233 + 2 \cdot 0,00766 = 0,0177 \approx 2\%$$

Абсолютна похибка виразу:

$$\Delta_N = 2,55 \cdot 0,0177 = 0,046 \approx 0,05$$

Відповідь: $N = 2,6(\pm 0,05)$; $\delta_N = 2$

4) Вважаючи всі цифри вхідних даних вірними, обчислити вираз, визначити абсолютну і відносну похибки і, користуючись правилами підрахунку цифр, залишити вірні цифри.

$$V = \pi \cdot h^2 \cdot S \cdot \left(R - \frac{h}{3} \right),$$

де $h=11,8$; $R=23,67$; $\pi=3,142$.

Значення складових

$$h^2=139,24; \quad \frac{h}{3} = \frac{11,8}{3} = 3,93; \quad \left(R - \frac{h}{3} \right) = (23,67 - 3,93) = 19,74.$$

Власне значення виразу

$$V = \pi \cdot h^2 \cdot S \cdot \left(R - \frac{h}{3} \right) = 3,142 \cdot 139,24 \cdot 19,74 = 8636,1.$$

Відносні похибки складових:

$$\delta_\pi = \frac{0,0005}{3,142} = 0,000159; \quad \delta_{h^2} = \frac{0,005}{139,24} = 0,0000359; \quad \delta_{Rh} = \frac{0,005}{19,74} = 0,000253.$$

Відносна похибка виразу:

$$\delta_V = \delta_\pi + \delta_{h^2} + \delta_{Rh} = 0,000159 + 0,0000359 + 0,000253 = 0,000448.$$

Абсолютна похибка виразу:

$$\Delta_V = \delta_V \cdot V = 0,000448 \cdot 8636,1 = 3,87 \approx 4.$$

Відповідь: $V \approx 8,63 \cdot 10^3 (\pm 4)$.

Програма чисельного диференціювання

$$\text{ORIGIN} := -3$$

$$f(x) := 7 \cdot x^3 + 5 \cdot x^2 - 13 \quad n := 4 \quad x_s := 1 \quad i := -3..n \quad h := 0.01$$

$$x_i := x_s + i \cdot h \quad y_i := f(x_i)$$

$$x = \begin{pmatrix} 0.97 \\ 0.98 \\ 0.99 \\ 1 \\ 1.01 \\ 1.02 \\ 1.03 \\ 1.04 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} -1.906789 \\ -1.609656 \\ -1.307407 \\ -1 \\ -0.687393 \\ -0.369544 \\ -0.046411 \\ 0.282048 \end{pmatrix}$$

$$dydx := \frac{1}{6 \cdot h} \cdot (-2 \cdot y_0 + 9 \cdot y_1 - 18 \cdot y_2 + 11 \cdot y_3) \quad dydx = 32.5789$$

$$d2ydx2 := \frac{1}{h^2} \cdot (y_{-1} - 2 \cdot y_0 + y_1) \quad d2ydx2 = 52$$

$$x := 1 \quad \frac{d}{dx} f(x) = 31 \quad \frac{d^2}{dx^2} f(x) = 52$$

$$\frac{d}{dz} f(z) \rightarrow 21 \cdot z^2 + 10 \cdot z \quad df(z) := 21 \cdot z^2 + 10 \cdot z \quad df(x) = 31$$

$$\frac{d^2}{dz^2} f(z) \rightarrow 42 \cdot z + 10 \quad d2f(z) := 42 \cdot z + 10 \quad d2f(x) = 52$$

Програма чисельного інтегрування

$$a := 0 \quad b := 1 \quad f(t) := \frac{1}{1+t^2}$$

$$\int f(t) dt \rightarrow \text{atan}(t) \quad F(t) := \text{atan}(t) \quad I := F(b) - F(a) \quad I = 0.785398$$

$$IP := \int_a^b f(t) dt \quad IP = 0.785398$$

$$n := 10 \quad h := \frac{b-a}{n}$$

$$IM(a,b,h) := \left| \begin{array}{l} h \leftarrow \frac{b-a}{n} \\ s \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 0..n-1 \\ \quad s \leftarrow s + h \cdot f[a + (i+0.5) \cdot h] \\ s \end{array} \right|$$

$$IM(a,b,h) = 0.785606$$

$$IM1 := h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f[a + (i+0.5) \cdot h] \quad IM1 = 0.785606$$

$$IT(a,b,h) := \left| \begin{array}{l} h \leftarrow \frac{b-a}{n} \\ s \leftarrow h \cdot \frac{f(a) + f(b)}{2} \\ \text{for } i \in 1..n-1 \\ \quad s \leftarrow s + h \cdot f(a + i \cdot h) \\ s \end{array} \right|$$

$$IT(a,b,h) = 0.784981$$

$$IT1 := h \cdot \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(a + i \cdot h) \right) \quad IT1 = 0.784981$$

$$\begin{aligned}
& \text{IS}(a,b,h) := \left| \begin{array}{l} h \leftarrow \frac{b-a}{n} \\ s \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1,3..n-1 \\ \quad s \leftarrow s + 4 \cdot f(a+i \cdot h) + 2 \cdot f[a+(i+1) \cdot h] \\ s \leftarrow \frac{h}{3} \cdot (f(a) - f(b) + s) \\ s \end{array} \right. \\
& \text{IS}(a,b,h) = 0.785398 \\
& \text{IS1} := \frac{h}{3} \cdot \left[f(a) - f(b) + \sum_{i=1}^{n-1} \text{if}[\text{mod}(i,2) \neq 0, 4 \cdot f(a+i \cdot h) + 2 \cdot f[a+(i+1) \cdot h], 0] \right] \\
& \text{IS1} = 0.785398 \\
& \text{ORIGIN} := 1 \quad N := 10^5 \quad \xi := \text{runif}(N,a,b) \\
& \text{IMK} := \frac{b-a}{N} \cdot \sum_{i=1}^N f(\xi_i) \quad \text{IMK} = 0.784883
\end{aligned}$$

**Графічні схеми алгоритмів розв'язання
алгебраїчних рівнянь з дійсними коренями**

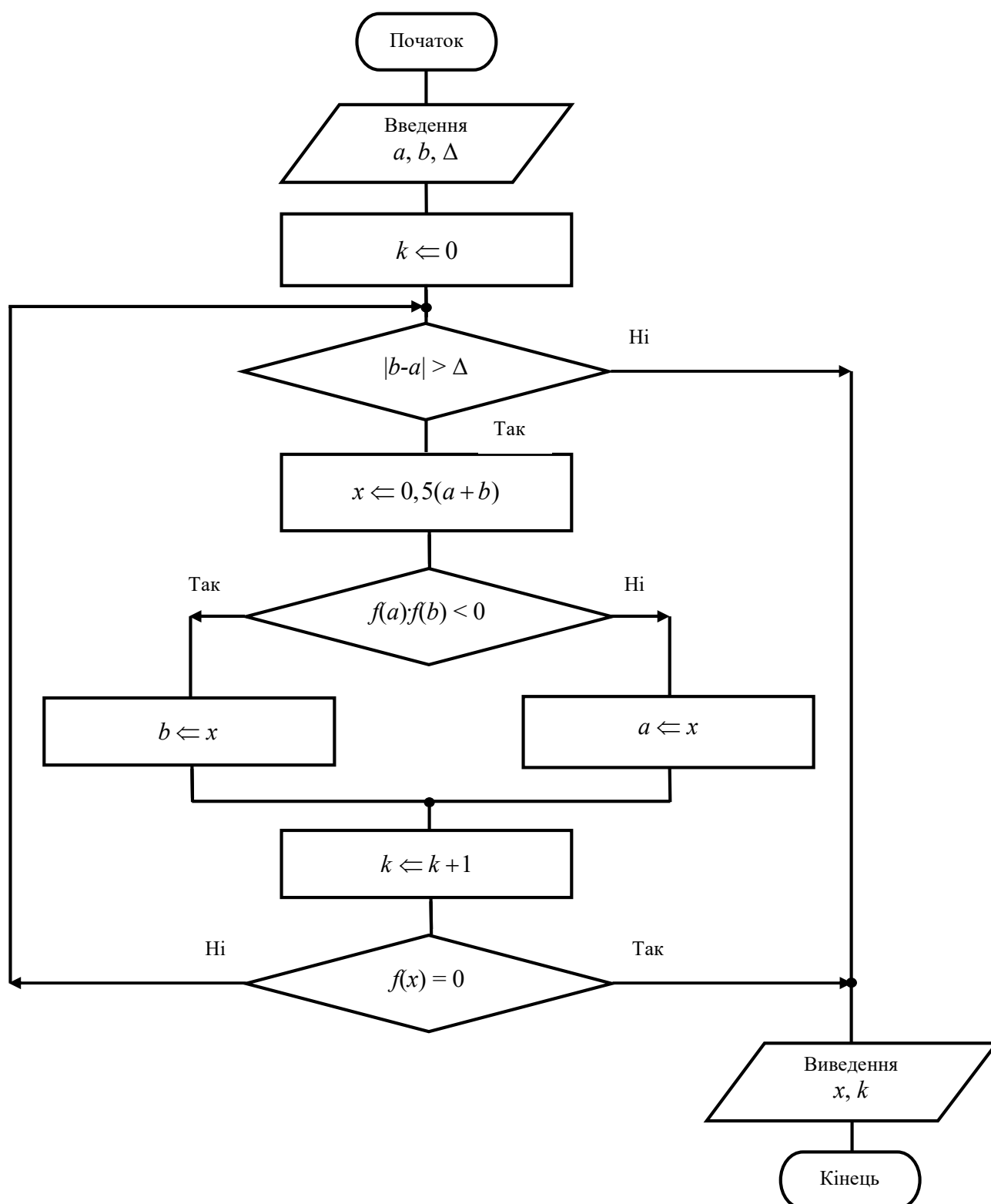


Рис. Д.5.1 Графічна схема алгоритму за методом дихотомії

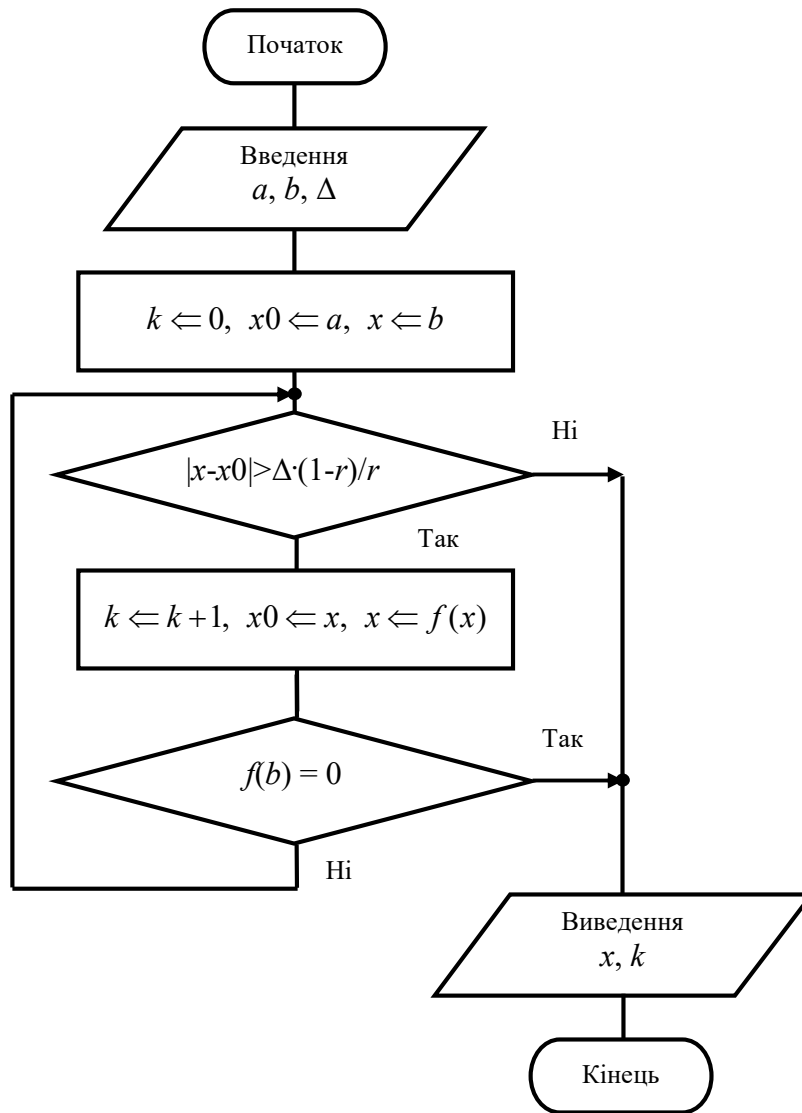


Рис. Д.5.2 Графічна схема алгоритму за методом ітерацій

Програма розв'язання алгебраїчних рівнянь з дійсними коренями

$$f(x) := -\exp(-x) + 0.5$$

$$a := 0 \quad b := 1 \quad \Delta := 0.001$$

$$X(a,b,\Delta) := \left| \begin{array}{l} k \leftarrow 0 \\ \text{while } |b - a| > \Delta \\ \quad \left| \begin{array}{l} x \leftarrow \frac{b + a}{2} \\ b \leftarrow x \text{ if } f(a) \cdot f(x) < 0 \\ a \leftarrow x \text{ otherwise} \\ k \leftarrow k + 1 \\ \text{break if } f(x) = 0 \end{array} \right. \\ \left(\begin{array}{c} k \\ x \end{array} \right) \end{array} \right.$$

$$X(a,b,\Delta) = \left(\begin{array}{c} 10 \\ 0.692 \end{array} \right)$$

$$Y1(a,b,\Delta) := \left| \begin{array}{l} k \leftarrow 1 \\ x0 \leftarrow b \\ x1 \leftarrow a + \frac{f(a)}{f(a) - f(b)} \cdot (b - a) \\ \text{while } |x1 - x0| > \Delta \\ \quad \left| \begin{array}{l} b \leftarrow x1 \text{ if } f(a) \cdot f(x1) < 0 \\ a \leftarrow x1 \text{ otherwise} \\ x0 \leftarrow x1 \\ x1 \leftarrow a + \frac{f(a)}{f(a) - f(b)} \cdot (b - a) \\ k \leftarrow k + 1 \\ \text{break if } f(x1) = 0 \end{array} \right. \\ \left(\begin{array}{c} k \\ x1 \end{array} \right) \end{array} \right.$$

$$Y1(a,b,\Delta) = \begin{pmatrix} 6 \\ 0.693 \end{pmatrix}$$

$$d2fdx2(x,\Delta) := \frac{f(x+\Delta) + f(x-\Delta) - 2 \cdot f(x)}{\Delta^2}$$

$$d2fdx2a := d2fdx2(a,\Delta) \quad d2fdx2b := d2fdx2(b,\Delta)$$

$$f(a) \cdot d2fdx2a = 0.5 \quad f(b) \cdot d2fdx2b = -0.049$$

$$Y2(a,b,\Delta) := \left| \begin{array}{l} k \leftarrow 1 \\ \text{if } f(a) \cdot d2fdx2a > 0 \\ \quad \left| \begin{array}{l} x0 \leftarrow a \\ x1 \leftarrow a - \frac{(b-a) \cdot f(a)}{f(b) - f(a)} \end{array} \right. \\ \text{otherwise} \\ \quad \left| \begin{array}{l} x0 \leftarrow b \\ x1 \leftarrow b + \frac{(b-a) \cdot f(b)}{f(a) - f(b)} \end{array} \right. \\ \text{while } |x1 - x0| > \Delta \\ \quad \left| \begin{array}{l} x0 \leftarrow x1 \\ x1 \leftarrow a - \frac{(x0-a) \cdot f(a)}{f(x0) - f(a)} \quad \text{if } f(a) \cdot d2fdx2a > 0 \\ x1 \leftarrow b + \frac{(b-x0) \cdot f(b)}{f(x0) - f(b)} \quad \text{otherwise} \\ k \leftarrow k + 1 \\ \text{break if } f(x1) = 0 \end{array} \right. \\ \left(\begin{array}{c} k \\ x1 \end{array} \right) \end{array} \right|$$

$$Y2(a,b,\Delta) = \begin{pmatrix} 6 \\ 0.693 \end{pmatrix}$$

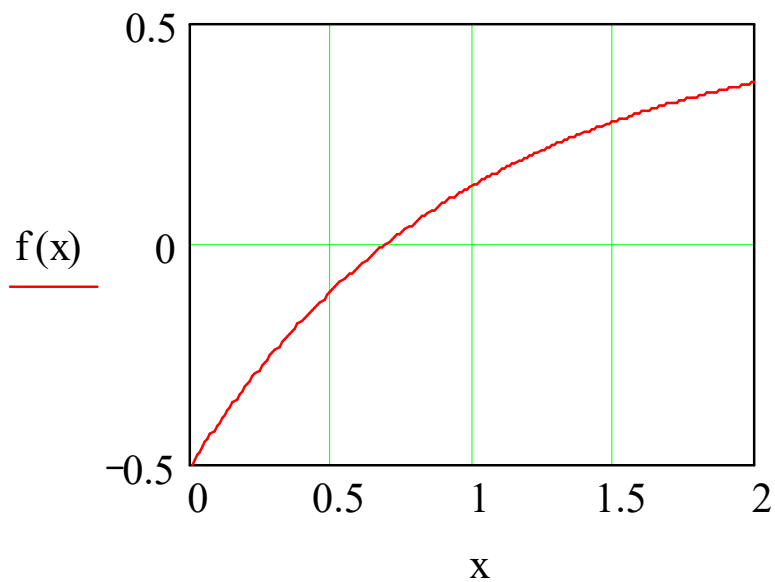
$$dfdx(x,\Delta) := \frac{f(x+\Delta) - f(x-\Delta)}{2\Delta}$$

$$Z(a,b,\Delta) := \left| \begin{array}{l} k \leftarrow 0 \\ \text{if } f(a) \cdot d^2f/dx^2(a,\Delta) > 0 \\ \quad \left| \begin{array}{l} x_0 \leftarrow a \\ x_1 \leftarrow a - \frac{f(a)}{df/dx(a,\Delta)} \end{array} \right. \\ \text{otherwise} \\ \quad \left| \begin{array}{l} x_0 \leftarrow b \\ x_1 \leftarrow b - \frac{f(b)}{df/dx(b,\Delta)} \end{array} \right. \\ \text{while } |x_1 - x_0| > \Delta \\ \quad \left| \begin{array}{l} x_0 \leftarrow x_1 \\ x_1 \leftarrow x_0 - \frac{f(x_0)}{df/dx(x_0,\Delta)} \\ k \leftarrow k + 1 \\ \text{break if } f(x_1) = 0 \end{array} \right. \\ \left(\begin{array}{c} k \\ x_1 \end{array} \right) \end{array} \right|$$

$$Z(a,b,\Delta) = \left(\begin{array}{c} 3 \\ 0.693 \end{array} \right)$$

$$\text{root}(f(x), x, a, b) = 0.693$$

$$x := 0, 0.01 \dots 2$$



$$f(x) := 0.2 \cdot (x^2 + \sin(x) + 1)$$

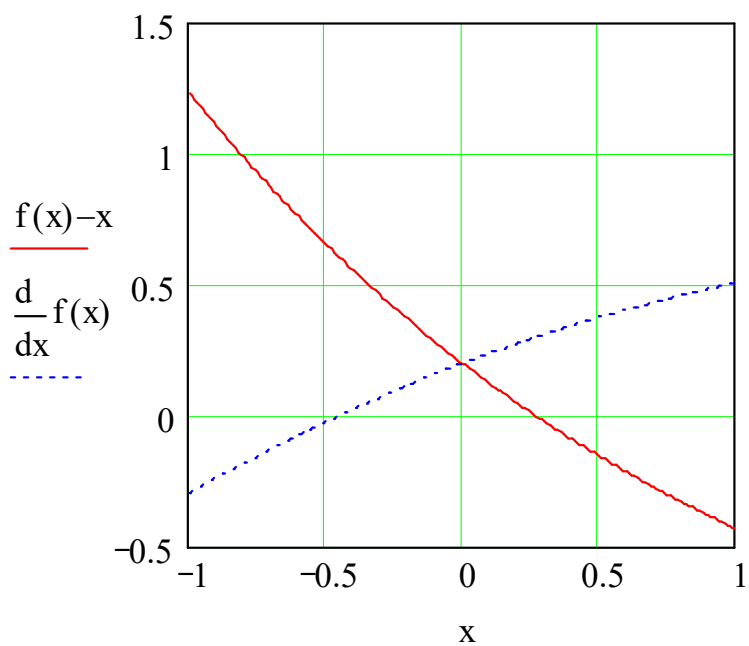
$$\Delta := 0.000001 \quad a := -1 \quad b := 1 \quad r := 0.9$$

$$X(a, b, \Delta, r) := \left| \begin{array}{l} k \leftarrow 0 \\ x_0 \leftarrow a \\ x_1 \leftarrow b \\ \text{while } |x_1 - x_0| > \Delta \cdot \frac{1-r}{r} \\ \quad \left| \begin{array}{l} x_0 \leftarrow x_1 \\ x_1 \leftarrow f(x_0) \\ k \leftarrow k + 1 \\ \text{break if } f(x_1) = 0 \end{array} \right. \\ \left(\begin{array}{c} k \\ x_1 \end{array} \right) \end{array} \right.$$

$$X(a, b, \Delta, r) = \left(\begin{array}{c} 15 \\ 0.267 \end{array} \right)$$

$$\text{root}(f(x) - x, x, a, b) = 0.267$$

$$x := -1, -0.99 \dots 1$$



Програма розв'язання алгебраїчних рівнянь з комплексними коренями

ORIGIN := 1 $f(z) := z^4 + 2 \cdot z^3 + z^2 + 8 \cdot z - 8$ R1 := 1.8 R2 := 1.95

$$A := \text{polyroots} \left(\begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad A = \begin{pmatrix} -2.918 \\ 0.075 + 1.887i \\ 0.075 - 1.887i \\ 0.769 \end{pmatrix}$$

$i := 1.. \text{length}(A)$ $B_i := |A_i|$

$$B = \begin{pmatrix} 2.918 \\ 1.888 \\ 1.888 \\ 0.769 \end{pmatrix}$$

num := 2 N := 10^5 k := 1.. N

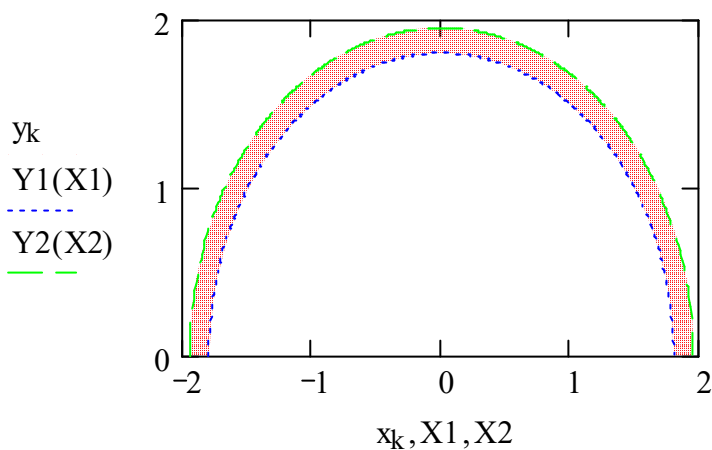
$X1 := -R1, -R1 + 0.01.. R1$ $X2 := -R2, -R2 + 0.01.. R2$

$\xi_1 := \text{runif}(N, 0, 1)$ $\xi_2 := \text{runif}(N, 0, 1)$

$x_k := \sqrt{R1^2 + \xi_{1k} \cdot (R2^2 - R1^2)} \cdot \cos(\pi \cdot \xi_{2k})$

$y_k := \sqrt{R1^2 + \xi_{1k} \cdot (R2^2 - R1^2)} \cdot \sin(\pi \cdot \xi_{2k})$

$Y1(X1) := \sqrt{R1^2 - X1^2}$ $Y2(X2) := \sqrt{R2^2 - X2^2}$



$$\Delta(N, p) := \sqrt{\frac{R1^2 - R2^2}{2 \cdot N} \cdot \ln(1 - p)}$$

NE := 10^3

```

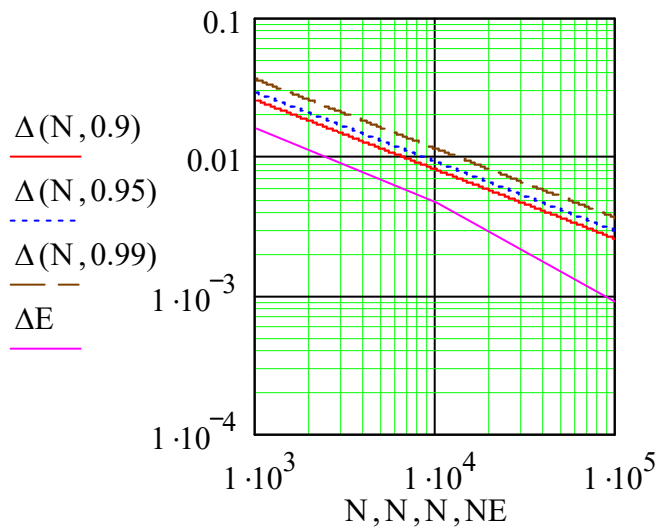
CROOT(R1,R2,NE) :=
  Rez0 ←  $\sqrt{R1^2 + \xi 1_1 \cdot (R2^2 - R1^2)} \cdot \cos(\pi \cdot \xi 2_1)$ 
  Imz0 ←  $\sqrt{R1^2 + \xi 1_1 \cdot (R2^2 - R1^2)} \cdot \sin(\pi \cdot \xi 2_1)$ 
  z0 ← Rez0 + i·Imz0
  W0 ← f(z0)
  for k ∈ 2.. NE
    Rez ←  $\sqrt{R1^2 + \xi 1_k \cdot (R2^2 - R1^2)} \cdot \cos(\pi \cdot \xi 2_k)$ 
    Imz ←  $\sqrt{R1^2 + \xi 1_k \cdot (R2^2 - R1^2)} \cdot \sin(\pi \cdot \xi 2_k)$ 
    z ← Rez + i·Imz
    W ← f(z)
    if |W| < |W0|
      z0 ← z
      W0 ← W
  z0

```

$CROOT(R1,R2,NE) = 0.062 + 1.895i \quad |CROOT(R1,R2,NE) - A_{num}| = 0.016$

$$NE := \begin{pmatrix} 10^3 \\ 10^4 \\ 10^5 \end{pmatrix} \quad \Delta E := \begin{pmatrix} 0.016 \\ 4.638 \cdot 10^{-3} \\ 8.882 \cdot 10^{-4} \end{pmatrix}$$

$N := 10^3 .. 10^5$



Програма розв'язання систем лінійних рівнянь

$$\text{ORIGIN} := 1 \quad A := \begin{pmatrix} 4.7 & 2.8 & 1.9 \\ 1.1 & 3.4 & 1.8 \\ 4.2 & -1.7 & 9.3 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 0.7 \\ 1.1 \\ 2.8 \end{pmatrix} \quad h(i,j) := 0 \quad \Delta := 10^{-3}$$

$$\text{xi}(A,b,\Delta) := \left| \begin{array}{l} n \leftarrow \text{rows}(A) \\ k \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1..n \\ \quad \left| \begin{array}{l} \beta_i \leftarrow \frac{b_i}{A_{i,i}} \\ \text{for } j \in 1..n \\ \quad \alpha_{i,j} \leftarrow -\left(\frac{A_{i,j}}{A_{i,i}}\right) \end{array} \right. \\ x \leftarrow \text{matrix}(n,1,h) \\ x1 \leftarrow \text{matrix}(n,1,h) + 1 \\ \text{while } |x1 - x| > \Delta \\ \quad \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..n \\ \quad x_i \leftarrow x1_i \\ \text{for } i \in 1..n \\ \quad x1_i \leftarrow \beta_i + \sum_{j=1}^n \text{if}(i \neq j, \alpha_{i,j} \cdot x_j, 0) \\ k \leftarrow k + 1 \end{array} \right. \end{array} \right| \begin{pmatrix} x \\ k \end{pmatrix}$$

$$\text{xi}(A,b,\Delta)_1 = \begin{pmatrix} -0.095 \\ 0.157 \\ 0.373 \end{pmatrix} \quad \text{xi}(A,b,\Delta)_2 = 21$$

$$A^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} -0.095 \\ 0.157 \\ 0.373 \end{pmatrix}$$

$$\text{lsolve}(A,b) = \begin{pmatrix} -0.095 \\ 0.157 \\ 0.373 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ab}(A,b) := \begin{array}{l} n \leftarrow \text{rows}(A) \\ \text{for } i \in 1..n \\ \quad \left| \begin{array}{l} M_i \leftarrow \text{augment}(b, \text{submatrix}(A, 1, n, 2, n)) \text{ if } i = 1 \\ M_i \leftarrow \text{augment}(\text{submatrix}(A, 1, n, 1, n-1), b) \text{ if } i = n \\ \text{if } i \neq 1 \wedge i \neq n \\ \quad \left| \begin{array}{l} M_i \leftarrow \text{augment}(\text{submatrix}(A, 1, n, 1, i-1), b) \\ M_i \leftarrow \text{augment}(M_i, \text{submatrix}(A, 1, n, i+1, n)) \end{array} \right. \end{array} \right. \\ M \end{array}$$

$$\text{Ab}(A,b)_1 = \begin{pmatrix} 0.7 & 2.8 & 1.9 \\ 1.1 & 3.4 & 1.8 \\ 2.8 & -1.7 & 9.3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ab}(A,b)_2 = \begin{pmatrix} 4.7 & 0.7 & 1.9 \\ 1.1 & 1.1 & 1.8 \\ 4.2 & 2.8 & 9.3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ab}(A,b)_3 = \begin{pmatrix} 4.7 & 2.8 & 0.7 \\ 1.1 & 3.4 & 1.1 \\ 4.2 & -1.7 & 2.8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{|\text{Ab}(A,b)_1|}{|A|} \\ \frac{|\text{Ab}(A,b)_2|}{|A|} \\ \frac{|\text{Ab}(A,b)_3|}{|A|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.095 \\ 0.157 \\ 0.373 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \text{yg}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) := & \left| \begin{array}{l}
 n \leftarrow \text{rows}(\mathbf{A}) \\
 \mathbf{B}_1 \leftarrow \mathbf{b} \\
 \mathbf{MA}_1 \leftarrow \mathbf{A} \\
 \text{for } k \in 2..n \\
 \quad \left| \begin{array}{l}
 \text{for } i \in k..n \\
 \quad \left| \begin{array}{l}
 b_i \leftarrow b_i - \frac{A_{i,k-1} \cdot b_{k-1}}{A_{k-1,k-1}} \\
 \text{for } j \in k..n \\
 \quad A_{i,j} \leftarrow A_{i,j} - \frac{A_{i,k-1} \cdot A_{k-1,j}}{A_{k-1,k-1}}
 \end{array}
 \end{array}
 \right. \\
 \quad \mathbf{MA}_k \leftarrow \mathbf{A} \\
 \quad \mathbf{B}_k \leftarrow \mathbf{b} \\
 \quad \left(\mathbf{B}_n \right)_n \\
 x_n \leftarrow \frac{\left(\mathbf{MA}_n \right)_{n,n}}{\left(\mathbf{MA}_n \right)_{n,n}} \\
 \text{for } k \in n-1..1 \\
 \quad \left(\mathbf{B}_k \right)_k - \sum_{i=k+1}^n \left(\mathbf{MA}_k \right)_{k,i} \cdot x_i \\
 x_k \leftarrow \frac{\left(\mathbf{MA}_k \right)_{k,k}}{\left(\mathbf{MA}_k \right)_{k,k}}
 \end{array} \right. \\
 \text{yg}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = & \begin{pmatrix} x \\ -0.095 \\ 0.157 \\ 0.373 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Програма розв'язання звичайних диференціальних рівнянь

$$a := 0 \quad b := 1.5 \quad N := 10 \quad \Delta := \frac{b-a}{N} \quad i := 0..N \quad x_i := a + i \cdot \Delta$$

$$f(y, x) := y \quad y_{e0} := 1 \quad y_{i0} := 1 \quad i := 0..N-1 \quad y_{e_{i+1}} := y_{e_i} + f(y_{e_i}, x_i) \cdot \Delta$$

$$y_{i+1} := y_i + \left(f(y_i, x_i) + f\left(y_i + f(y_i, x_i) \cdot \Delta, x_i + \Delta\right) \right) \cdot \frac{\Delta}{2} \quad y_0 := 1$$

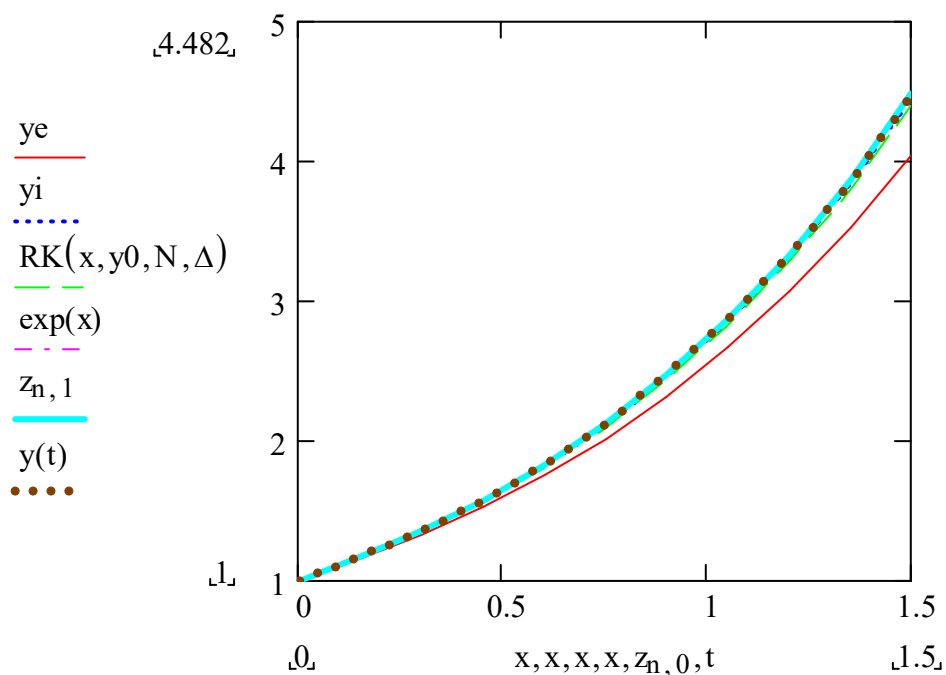
$$\text{RK}(x, y_0, N, \Delta) := \begin{array}{|l} y_0 \leftarrow y_0 \\ \text{for } i \in 0..N-1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} K1_i \leftarrow f(y_i, x_i) \\ K2_i \leftarrow f\left(y_i + K1_i \cdot \frac{\Delta}{2}, x_i + \frac{\Delta}{2}\right) \\ K3_i \leftarrow f\left(y_i + K2_i \cdot \frac{\Delta}{2}, x_i + \frac{\Delta}{2}\right) \\ K4_i \leftarrow f\left(y_i + K3_i \cdot \frac{\Delta}{2}, x_i + \Delta\right) \\ y_{i+1} \leftarrow y_i + (K1_i + 2 \cdot K2_i + 2 \cdot K3_i + K4_i) \cdot \frac{\Delta}{6} \end{array} \right. \\ y \end{array}$$

$$D(t, y) := y \quad z := \text{rkfixed}(y_0, a, b, N, D) \quad n := 0..N$$

Given

$$y'(t) = y(t) \quad y(0) = 1$$

$$y := \text{Odesolve}(t, b) \quad t := a, a + \Delta..b$$



a := 0 b := 1 ya := 1 yb := 26 q := 3 p := 6

$\lambda := \text{polyroots}\left(\begin{pmatrix} -p \\ q \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad \lambda = \begin{pmatrix} -4.372 \\ 1.372 \end{pmatrix}$

C1 := 0 C2 := 0

Given

$C1 \cdot \exp(\lambda_0 \cdot a) + C2 \cdot \exp(\lambda_1 \cdot a) = ya$

$C1 \cdot \exp(\lambda_0 \cdot b) + C2 \cdot \exp(\lambda_1 \cdot b) = yb$

$\begin{pmatrix} C1 \\ C2 \end{pmatrix} := \text{Find}(C1, C2) \quad \begin{pmatrix} C1 \\ C2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5.61 \\ 6.61 \end{pmatrix}$

x := a, a + 0.01 .. b

$y(x) := C1 \cdot \exp(\lambda_0 \cdot x) + C2 \cdot \exp(\lambda_1 \cdot x)$

n := 5 h := $\frac{b-a}{n}$ i := 0..n

$X_i := a + i \cdot h$

$A := \begin{bmatrix} -(4 + 2 \cdot p \cdot h^2) & 2 + q \cdot h & 0 & 0 \\ 2 - q \cdot h & -(4 + 2 \cdot p \cdot h^2) & 2 + q \cdot h & 0 \\ 0 & 2 - q \cdot h & -(4 + 2 \cdot p \cdot h^2) & 2 + q \cdot h \\ 0 & 0 & 2 - q \cdot h & -(4 + 2 \cdot p \cdot h^2) \end{bmatrix}$

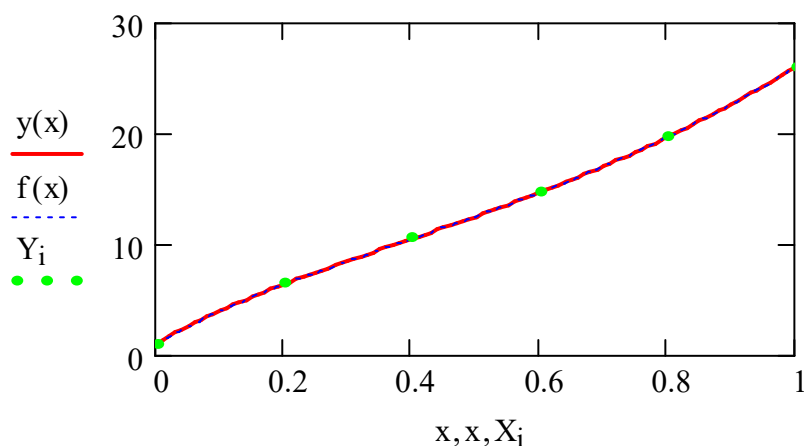
$B := \begin{bmatrix} -(2 - q \cdot h) \cdot ya \\ 0 \\ 0 \\ -(2 + q \cdot h) \cdot yb \end{bmatrix}$

$C := A^{-1} \cdot B \quad Y_0 := ya \quad Y_n := yb \quad j := 1..n-1 \quad Y_j := C_{j-1}$

Given

$f'(t) + q \cdot f(t) - p \cdot f(t) = 0 \quad f(a) = ya \quad f(b) = yb$

f := Odesolve(t,b)



Програма розв'язання диференціальних рівнянь у часткових похідних

ORIGIN := 1 L := 1 a := 1

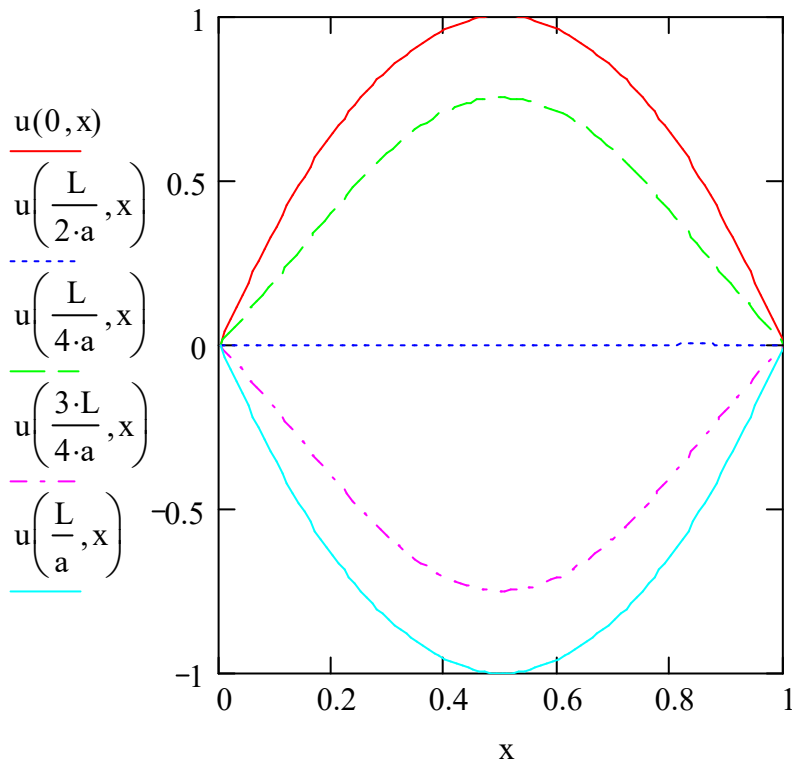
$$\phi(x) := 1 - \left(\frac{2 \cdot x - L}{L}\right)^2 \quad \psi(x) := 0$$

n := 5 k := 1..n

$$b_k := \frac{2}{L} \cdot \int_0^L \phi(x) \cdot \sin\left(k \cdot \pi \cdot \frac{x}{L}\right) dx \quad c_k := \frac{2}{\pi \cdot k \cdot a} \cdot \int_0^L \psi(x) \cdot \sin\left(k \cdot \pi \cdot \frac{x}{L}\right) dx$$

$$u(t, x) := \sum_{k=1}^n \left(b_k \cdot \cos\left(k \cdot \pi \cdot \frac{a \cdot t}{L}\right) + c_k \cdot \sin\left(k \cdot \pi \cdot \frac{a \cdot t}{L}\right) \right) \cdot \sin\left(k \cdot \pi \cdot \frac{x}{L}\right)$$

x := 0, $\frac{L}{100}$.. L



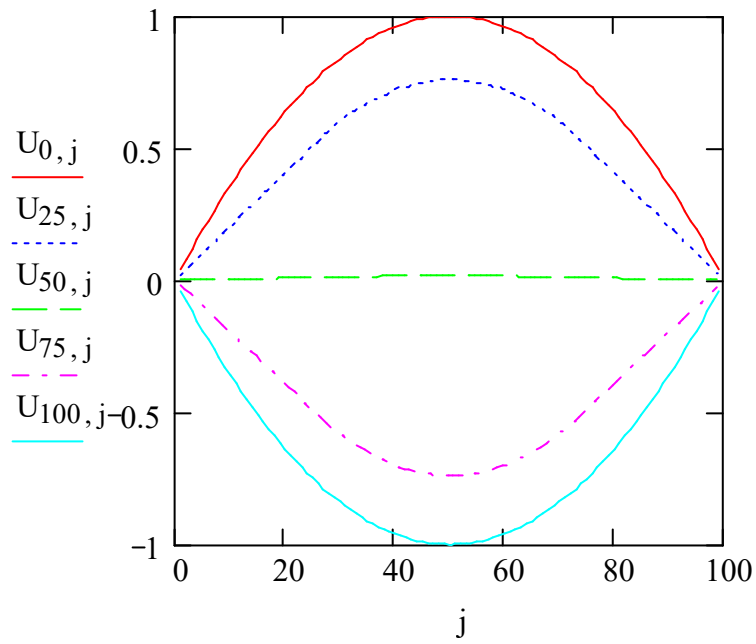
ORIGIN := 0 T := 1 n := 100 m := 100 dt := $\frac{T}{n}$ dx := $\frac{L}{m}$

f1(t) := 0 f2(t) := 0

i := 1..n j := 1..m-1

$U_{0,j} := \phi(j \cdot dx)$ $U_{1,j} := \phi(j \cdot dx) + \psi(j \cdot dx) \cdot dt$ $U_{i,0} := f1(i \cdot dt)$ $U_{i,m} := f2(i \cdot dt)$

$$U_{i+1,j} := 2 \cdot U_{i,j} \cdot \left[1 - \left(\frac{a \cdot dt}{dx} \right)^2 \right] - U_{i-1,j} + (U_{i,j+1} + U_{i,j-1}) \cdot \left(\frac{a \cdot dt}{dx} \right)^2$$



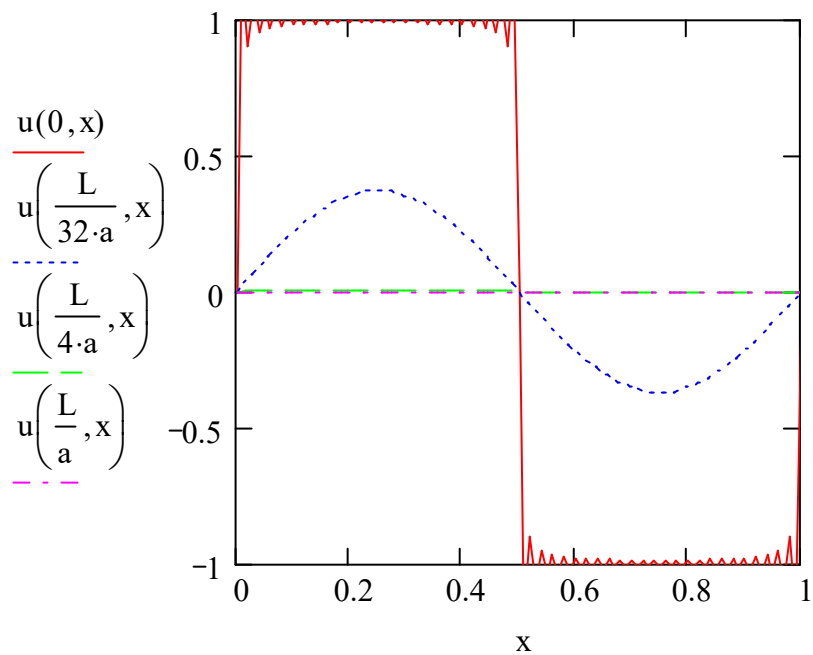
ORIGIN := 1 L := 1 a := 1 $\phi(x) := \text{if}\left(x < \frac{L}{2}, 1, -1\right)$

n := 100 k := 1..n

$$b_k := \frac{2}{L} \cdot \int_0^L \phi(x) \cdot \sin\left(k \cdot \pi \cdot \frac{x}{L}\right) dx$$

$$u(t, x) := \sum_{k=1}^n b_k \cdot \exp\left[-\left(k \cdot \pi \cdot \frac{a}{L}\right)^2 \cdot t\right] \cdot \sin\left(k \cdot \pi \cdot \frac{x}{L}\right)$$

x := 0, $\frac{L}{100}$.. L

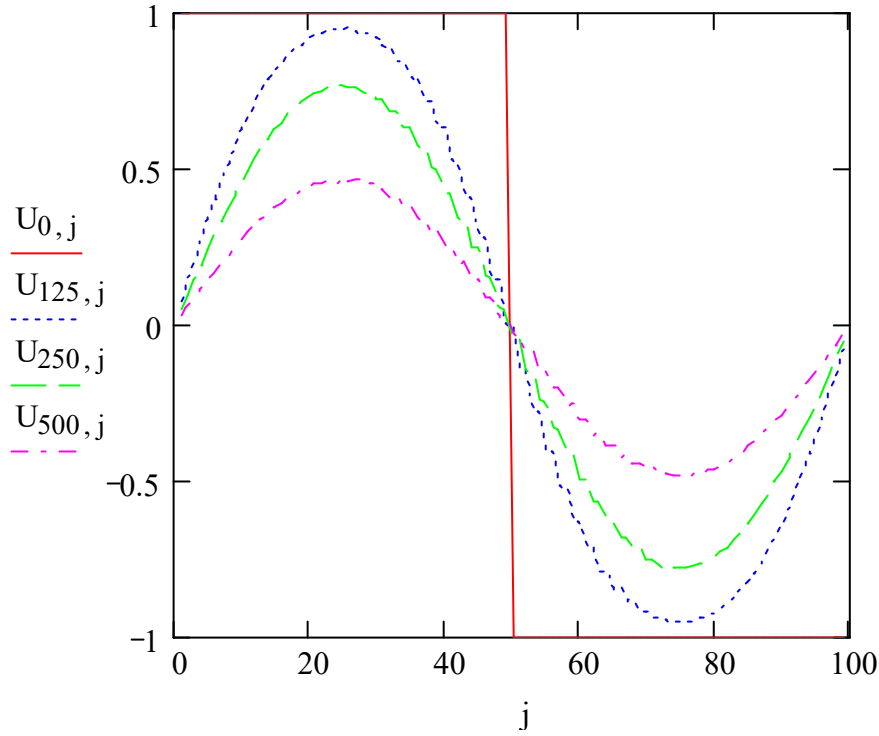


$$\text{ORIGIN} := 0 \quad T := 1 \quad n := 20000 \quad m := 100 \quad dt := \frac{T}{n} \quad dx := \frac{L}{m}$$

$$f1(t) := 0 \quad f2(t) := 0 \quad i := 0..n-1 \quad j := 1..m-1$$

$$U_{0,j} := \phi(j \cdot dx) \quad U_{i,0} := f1(i \cdot dt) \quad U_{i,m} := f2(i \cdot dt)$$

$$U_{i+1,j} := U_{i,j} \cdot (1 - 2 \cdot d) + (U_{i,j+1} + U_{i,j-1}) \cdot d$$



$$\text{ORIGIN} := 1 \quad L := 1 \quad U0 := 1$$

$$v0(x) := 0 \quad v1(x) := U0 \quad w0(y) := U0 \cdot \frac{y}{L} \quad w1(y) := U0 \cdot \frac{y}{L}$$

$$n := 100 \quad k := 1..n$$

$$a1_k := \sqrt{\frac{2}{L}} \cdot \int_0^L v0(x) \cdot \sin\left(k \cdot \pi \cdot \frac{x}{L}\right) dx \quad b1_k := \sqrt{\frac{2}{L}} \cdot \int_0^L v1(x) \cdot \sin\left(k \cdot \pi \cdot \frac{x}{L}\right) dx$$

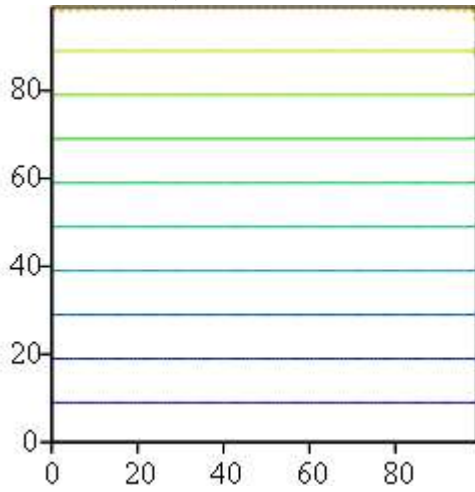
$$a2_k := \sqrt{\frac{2}{L}} \cdot \int_0^L w0(y) \cdot \sin\left(k \cdot \pi \cdot \frac{y}{L}\right) dy \quad b2_k := \sqrt{\frac{2}{L}} \cdot \int_0^L w1(y) \cdot \sin\left(k \cdot \pi \cdot \frac{y}{L}\right) dy$$

$$u1(x, y) := \sqrt{\frac{2}{L}} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{\sin\left(k \cdot \pi \cdot \frac{x}{L}\right)}{\sinh(k \cdot \pi)} \cdot \left[a1_k \cdot \sinh\left[k \cdot \pi \cdot \frac{(L-y)}{L}\right] + b1_k \cdot \sinh\left(k \cdot \pi \cdot \frac{y}{L}\right) \right]$$

$$u2(x, y) := \sqrt{\frac{2}{L}} \cdot \left[\sum_{k=1}^n \frac{\sin\left(k \cdot \pi \cdot \frac{y}{L}\right)}{\sinh(k \cdot \pi)} \cdot \left[a2_k \cdot \sinh\left[k \cdot \pi \cdot \frac{(L-x)}{L}\right] + b2_k \cdot \sinh\left(k \cdot \pi \cdot \frac{x}{L}\right) \right] \right]$$

$$u(x, y) := u1(x, y) + u2(x, y) \quad m := 100 \quad i := 1..m \quad j := 1..m$$

$$UA_{i,j} := u\left(L \cdot \frac{j}{m}, L \cdot \frac{i}{m}\right)$$



$$UA^T$$

$$\text{ORIGIN} := 0 \quad m := 4 \quad i := 1..m-1 \quad j := 1..m-1$$

$$f(i,j) := \begin{cases} -4 & \text{if } i = j \\ 1 & \text{if } |i-j| = 1 \vee |i-j| = 3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

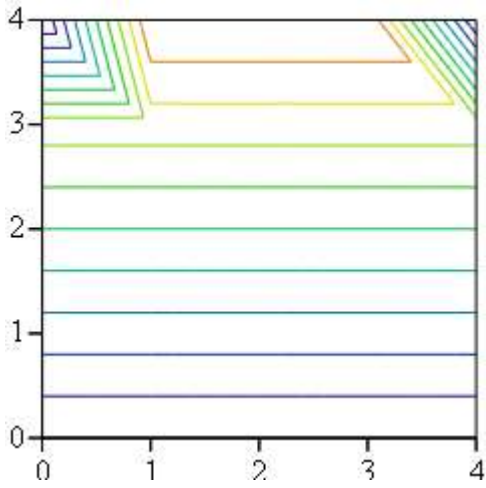
$$U_{0,j} := v0\left(L \cdot \frac{j}{m}\right) \quad U_{m,j} := v1\left(L \cdot \frac{j}{m}\right) \quad U_{i,0} := w0\left(L \cdot \frac{i}{m}\right)$$

$$U_{i,m} := w1\left(L \cdot \frac{i}{m}\right) \quad A := \text{matrix}[(m-1)^2, (m-1)^2, f]$$

$$A_{2,3} := 0 \quad A_{3,2} := 0 \quad A_{5,6} := 0 \quad A_{6,5} := 0$$

$$B := \begin{pmatrix} -U_{0,1} - U_{1,0} \\ -U_{0,2} \\ -U_{0,3} - U_{1,4} \\ -U_{2,0} \\ 0 \\ -U_{2,4} \\ -U_{3,0} - U_{4,1} \\ -U_{4,2} \\ -U_{3,4} - U_{4,3} \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} U_{1,1} \\ U_{1,2} \\ U_{1,3} \\ U_{2,1} \\ U_{2,2} \\ U_{2,3} \\ U_{3,1} \\ U_{3,2} \\ U_{3,3} \end{pmatrix} := A^{-1} \cdot B \quad A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$



U^T

Brief researchs abstracts

Research № 1. *Name: Approximate calculations.*

Input data:

- a pair of numerical equalities;
- three algebraic expressions, the values of the variables that enter them, and their absolute errors.

Brief content of research:

- determine which of two equalities is more accurate;
- calculate two algebraic expressions for which the values of the variables and their absolute errors are given, and determine the errors of the result;
- calculate an algebraic expression using the rules for counting correct digits, and assuming all significant figures of the input data to be correct.

Typical conclusions:

- all arithmetic and algebraic calculations performed with real numbers on digital computers are approximate, exact calculations are possible only with integers;
- absolute and relative error of number representation are defined, relative error is directly related to the accuracy of representation;
- the vast majority of arithmetic and algebraic operations increase the errors of the result in relation to the errors of the input data, only a few do not change or reduce them, for example, multiplication by a constant for absolute error or root extraction for relative.

Research № 2. *Name: Numerical differentiation.*

Input data:

- polynomial and transcendental functions;
- two formulas for numerical differentiation of 1st and 2nd or 3rd order.

Brief content of research:

- numerically calculate the values of derivatives for all given formulas and functions at a point $x = 1$ with a differentiation steps $h = \{0.01, 0.05\}$;
- numerically calculated values of derivatives for all given functions at a point $x = 1$ correspond to the value obtained using a graphical differentiation template;
- analytically calculate derivatives for all given functions using a graphical differentiation template and find their values at a point $x = 1$.

Typical conclusions:

- the analytically calculated derivatives for all given functions at a point $x = 1$ take on values that coincide with the corresponding values that are calculated using a graphical differentiation template;
- the values of the derivatives at a point $x = 1$ calculated using numerical differentiation formulas are close to the corresponding values calculated by other methods;

- with increasing differentiation step, the errors in the approximate values of the derivatives, which are calculated using numerical differentiation formulas, increase.

Research № 3. *Name:* Numerical integration.

Input data:

- definite integral;
- four methods of numerical integration (from a variety: quadrature formulas of left, middle, right rectangles, trapezoids, parabolas and the Monte Carlo method), which are determined by the option number.

Brief content of research:

- numerically calculate definite integral using the chosen methods. For Monte Carlo method use $N = \{10^3, 10^5\}$ random numbers, for other methods – $n = \{10, 50\}$ integration steps. Perform calculations using the summation template and using a solver block;
- calculate the finite differences 1-st and 2-nd order of the integrand function on the integration segment for a given number of steps $n = 10$;
- calculate theoretical value upper bound estimation error of integral for rectangles formula;
- calculate the value of a definite integral using the appropriate graphical template;
- analytically calculate the antiderivative of the integrand function. Calculate the value of the definite integral using the Newton-Leibniz formula.

Typical conclusions:

- the analytically calculated definite integral take on value that coincide with the value that are calculated using a graphical integratiation template;
- the values of the definite integral calculated using all of numerical methods are close to the corresponding values calculated by analytically and using a graphical integratiation template;
- with increase in the number of integration steps, the errors of the approximate values of the integral, which are calculated using all of numerical integration formulas, decrease.

Research № 4. *Name:* Solving algebraic equations with real roots.

Input data:

- two equations of the form $f(x) = 0$ and $\varphi(x) = x$ where $f(x)$ is the polinomyal function and segments of their roots localization;
- two numerical methods of solving algebraic equations with real roots (from a variety: dichotomies, chords and tangents), which are determined by the option number.

Brief content of research:

- plot the dependence of $y = f(x)$ on the localization segment of the root of the equation $f(x) = 0$ and graphycally define the root;
- numerically define the root of the equation $f(x) = 0$ by choosed methods;

- solve the equation $f(x) = 0$ by root and polyroots functions;
- plot the dependence of the iteration numbers on upper boundary value of the module of the difference in approximations of the solution vector at successive iteration steps $\Delta = \{10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}\}$ for choosed methods;
- plot the dependence of $y = \varphi(x) - x$ on the localization segment of the root of the equation $\varphi(x) = x$ and graphycally define the root;
- numerically define the root of the equation $\varphi(x) = x$ by method of itteration;
- solve the equation $\varphi(x) = x$ by root function;
- plot the dependence of the iteration numbers on upper boundary value of the module of the difference in approximations of the solution vector at successive iteration steps $\Delta = \{10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}\}$ for method of itteration.

Typical conclusions:

- the numerically calculated root of the equation $f(x) = 0$ by choosed methods take on values that coincide with the corresponding values that are obtained graphically and used root and polyroots functions;
- the numerically calculated root of the equation $\varphi(x) = x$ by itteration method take on values that coincide with the corresponding value that are obtained graphically and used root function;
- the dependences of the iteration numbers on upper boundary value of the module of the difference in approximations of the solution at successive iteration steps has monotonically decreasing character for all numerical methods.

Research № 5. *Name:* Solving algebraic equations with complex roots

Input data is equation of the form $f(z) = 0$ where $f(z)$ is the polinomyal function and the semiring of localization of its complex root.

Brief content of research:

- numerically define the root of the equation by method of Monte Carlo for numbers of itteration $N = \{10^3, 10^4, 10^5\}$;
- solve the equation by polyroots function;
- plot in general graphycal field the dependences on the number of itteration of the module of difference between approximation value of the root (which obtained by method of Monte Carlo) and conditionally exact value of the root (which obtained by polyroots function) and theoretical upper bound of the root localization error

$\Delta = \sqrt{\frac{R1^2 - R2^2}{2 \cdot N} \ln(1 - p)}$ where $R1, R2$ is the outer and inner radii of the root localization semiring, $p = 0.9; 0.95; 0.99$ is the he probability of the approximate value of the root falling within the Δ -neighborhood of the true one.

Typical conclusions:

- numerically calculated value of root correspond to the value obtained using by polyroots function;

- module of difference between approximation value of the root and the conditionally accurate root value is always less than the corresponding value of the upper bound of the root localization error;
- the dependences on the number of iteration of the module of difference between approximation value of the root and conditionally exact value of the root and theoretical upper bound of the root localization error has monotonically decreasing character.

Research № 6. *Name:* Solving systems of linear algebraic equations.

Input data is a compatible definite system of 3 linear algebraic equations with 3 unknowns and a dominant main diagonal.

Brief content of research:

- solve the system by simple iterations method;
- plotting the dependence of the iteration numbers on upper boundary value of the norm of the difference in approximations of the solution vector at successive iteration steps $\Delta = \{10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}\}$ for simple iterations method;
- solve the system by matrix method;
- solve the system by lsolve function;
- solve the system by decisive block;
- solve the system by Cramer method.

Typical conclusions:

- the solutions to the system of linear algebraic equations, obtained by all the methods used, coincide;
- the dependence of the iteration numbers on upper boundary value of the norm of the difference in approximations of the solution vector at successive iteration steps for simple iterations method has monotonically decreasing character.

Research № 7. *Name:* Solving of ordinary differential equations.

Input data:

- 1-st order ordinary differential equation in Cauchy form with initial condition;
- numerical method of ordinary differential equations integration (from a variety: corrected Euler method, modified Euler method, Runge-Kutt method,), which are determined by the option number.

Brief content of research:

- numerically integrate the differential equation using the chosen method for $n = \{30, 100\}$ integration steps;
- integrate the differential equation by Odesolve function;
- integrate the differential equation by rkfixed function;
- plot in general graphical field all the obtained partial solutions of the differential equation.

Typical conclusions:

- partial solutions of the differential equation, which were obtained by all the methods used, correspond to each other;

- with an increase in the number of integration steps, the deviation of the solution obtained by the numerical method from solutions using functions Odesolve and rkfixed decreases.

Research № 8. *Name:* Solving partial differential equations.

Input data is a shape and parameters of one-dimensional spatial distribution.

Brief content of research:

- for a given one-dimensional spatial distribution – function of the initial condition (initial distribution of the rod temperature), numerically solve the task of rod cooling down, using difference approximation of the parabolic type partial differential equation. To animate the graph of the solution function $U_{i,j}$. Let select: duration of the process $T = 1$ s, rod length $L = 1$ m, equation proportionality coefficient $d = 1$ m/s, the number of integration steps at time $n = 2 \cdot 10^4$, at spatial coordinate $m = 100$;
- using analytical solutions to the task of rod cooling down, for previous conditions to plot a graph of function-solution $u(t, x)$ for the moments of the time $t = \left\{ \frac{L}{100 \cdot d}, \frac{L}{50 \cdot d}, \frac{L}{20 \cdot d}, \frac{L}{10 \cdot d}, \frac{L}{5 \cdot d}, \frac{L}{2 \cdot d}, \frac{L}{d} \right\}$. Select the number of members of the partial sum in the row that indicates the decision $k = 100$.
- for a given one-dimensional spatial distribution – function of boundary conditions (distribution of electric potential of vertical boundaries) numerically solve the Dirichlet task for the Laplace equation on a two-dimensional square domain, using difference approximation of the elliptic type partial differential equation. Plot the graph of the isolines of the solution function $U_{i,j}$. Let select: the length of the side of the region $p = q = 1$ m, the value of the potential on the horizontal boundaries $U_{0,j} = U_{m,j} = 0$, the number of internal nodes of the grid $m - 1 = 3$.
- using analytical solutions to the Dirichlet task for the Laplace equation on a two-dimensional square domain for previous conditions to plot the graph of the isolines of the solution function $u(y, x)$. Select the number of members of the partial sum in the row that indicates the decision $k = 10$ and the number of grid nodes in which function-solution is determined $m = 100$.

Typical conclusions:

- numerical solutions for equations of both types correspond to analytical ones;
- For an elliptic type equation, the isolines of the numerical solution are piecewise linear, while those of the analytical solution are smooth. This is explained by the small number of equations of the difference scheme, which was used in the numerical solution.

ЗМІСТ

1. ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ	3
2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ, МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДЛЯ ЇХ ВИКОНАННЯ ТА ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ	5
2.1. Лабораторна робота № 1 Наближені обчислення	5
2.2. Лабораторна робота № 2 Чисельне диференціювання	8
2.3. Лабораторна робота № 3 Чисельне інтегрування	13
2.4. Лабораторна робота № 4 Розв'язання алгебраїчних рівнянь з дійсними коренями	17
2.5. Лабораторна робота № 5 Розв'язання алгебраїчних рівнянь з комплексними коренями	24
2.6. Лабораторна робота № 6 Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь	30
2.7. Лабораторна робота № 7 Розв'язання звичайних диференціальних рівнянь	36
2.8. Лабораторна робота № 8 Розв'язання диференціальних рівнянь в часткових похідних	43
3. КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ	55
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	57
Додаток 1. Індивідуальні завдання до лабораторної роботи № 1	58
Додаток 2. Приклад виконання лабораторної роботи № 1	72
Додаток 3. Програма чисельного диференціювання	74
Додаток 4. Програма чисельного інтегрування	75
Додаток 5. Графічні схеми алгоритмів розв'язання алгебраїчних рівнянь з дійсними коренями	77
Додаток 6. Програма розв'язання алгебраїчних рівнянь з дійсними коренями	79
Додаток 7. Програма розв'язання алгебраїчних рівнянь з комплексними коренями	83
Додаток 8. Програма розв'язання системи лінійних рівнянь	85
Додаток 9. Програма розв'язання звичайних диференціальних рівнянь	88
Додаток 10. Програма розв'язання диференціальних рівнянь у часткових похідних	90
Додаток 11. Brief researchs abstracts	95

Навчальне видання

Кожевников Антон Вячеславович
Сергєєва Катерина Леонідівна

КОМП'ЮТЕРНА МАТЕМАТИКА

Методичні рекомендації до виконання лабораторних робіт
для здобувачів ступеня бакалавра
освітньо-професійної програми «Інформаційні системи та технології»
зі спеціальності 126 Інформаційні системи та технології

Видано в авторській редакції

Електронний ресурс.
Підписано до видання 28.04.2025. Авт. арк. 7,3.

Національний технічний університет «Дніпровська політехніка».
49005, м. Дніпро, просп. Дмитра Яворницького, 19.